

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Matematicko-fyzikální fakulta

Úvod do teorie fyzikálních měření

Doc. RNDr. Boris Sprušil, CSc.

RNDr. Pavla Zieleniecová, CSc.

Státní pedagogické nakladatelství


Praha 1989

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

Úvod do teorie fyzikálních měření

Doc. RNDr. Boris Sprušil, CSc.,
RNDr. Pavla Zieleniecová, CSc.

KNIHOVNA MFF UK


2568007702

1989

Státní pedagogické nakladatelství
Praha

Ústřední knihovna mat. fyz. fakulty UK odd. fyzikální P r a h a	
přir. / 131/97	Sig. SKF

ÚSTŘEDNÍ KNIHOVNA
MATEM. FYZ. FAK.
ODDĚL. TROJA
V Holešovičkách 2, Praha 8

OBSAH

Úvod

1. Význam pokusu v procesu fyzikálního poznávání ... 1
2. Fyzikální veličiny a jejich jednotky ... 2
 - 2.1 Fyzikální veličiny ... 2
 - 2.2 Jednotky fyzikálních veličin. Soustava SI ... 3
 - 2.2.1 Základní jednotky soustavy SI ... 4
 - 2.2.2 Doplnkové jednotky soustavy SI ... 5
 - 2.2.3 Odvozené veličiny a jednotky soustavy SI ... 5
 - 2.2.4 Násobky a díly jednotek ... 6
 - 2.2.5 Vedlejší a neplatné jednotky ... 7
 - 2.3 Rozměry fyzikálních veličin. Rozměrové a bezrozměrové veličiny ... 8
3. Metody měření ... 10
4. Chyby měření ... 13
 - 4.1 Zdroje chyb měření ... 13
 - 4.2 Druhy chyb měření ... 14
 - 4.3 Systematické chyby měření ... 16
 - 4.4 Náhodné chyby přímých měření ... 21
 - 4.4.1 Rozdělení četností v souboru naměřených hodnot. Od histogramu k normálnímu rozdělení ... 21
 - 4.4.2 Vlastnosti normálního rozdělení ... 26
 - 4.4.3 Vlastnosti spojitě náhodné veličiny, která se řídí normálním rozdělením ... 32
 - 4.4.4 Odhady střední hodnoty a směrodatné odchylky pro konečný počet měření ... 33
 - 4.4.5 Směrodatná odchylka při malém počtu měření ... 35
 - 4.4.6 Kritéria pro vyloučení hrubých chyb měření ... 36
 - 4.4.7 Směrodatná odchylka aritmetického průměru ... 38
 - 4.4.8 Zaokrouhlení chyby a aritmetického průměru. Zápis výsledku měření ... 39
 - 4.5 Chyby měřidel ... 45
 - 4.5.1 Základní pojmy ... 45
 - 4.5.2 Určování chyb některých měřidel ... 46
 - 4.6 Celková chyba přímých měření ... 49
 - 4.7 Chyby nepřímých měření ... 52
 - 4.7.1 Přírůstek veličiny ... 52
 - 4.7.2 Náhodné chyby nepřímých měření ... 54
 - 4.7.3 Směrodatná odchylka v některých jednoduchých případech ... 56
 - 4.7.4 Celková chyba nepřímých měření ... 58
5. Metody zpracování výsledků měření fyzikálních závislostí ... 63
 - 5.1 Úvod ... 63
 - 5.2 Interpolace a extrapolace ... 66
 - 5.3 Prokládání polynomu nepřesně určenými body ... 69
 - 5.4 Skupinová metoda ... 71
 - 5.5 Metoda postupných měření ... 73
 - 5.6 Metoda nejmenších čtverců ... 74
 - 5.7 Grafické znázornění fyzikálních závislostí ... 81

5.8 Grafické vyrovnání naměřených závislostí ...	86
6. Příprava na měření a zpráva o provedeném měření ...	88
6.1 Příprava na měření ve fyzikálním praktiku ...	88
6.2 Plánování přesnosti měření ...	89
6.3 Zpráva o provedeném měření ...	90
Na závěr ...	103
Literatura ...	104

PŘEDMLUVA

Toto skriptum je určeno posluchačům učitelského studia fyziky (v kombinaci s obory matematika, základy techniky nebo chemie) jako učební pomůcka k vyučovacím předmětům "Seminář z teorie fyzikálních měření" v 1. semestru. Jeho obsahem jsou základní poznatky potřebné pro přípravu, provádění a vyhodnocování fyzikálních pokusů v základním fyzikálním praktiku, které posluchači absolvují v dalších semestrech studia. Skriptum poslouží jako pomocná literatura i pro toto základní praktikum.

Skriptum se skládá ze šesti obsahem i obtížností došti různorodých kapitol. Tam, kde by matematické prostředky potřebné při důsledném výkladu přesáhly možnosti posluchačů 1. semestru, upustili jsme od důkazů a odvozování a snažili jsme se spíše o názorné přiblížení poznatků; týká se to především tématu Chyby měření ve 4. kapitole. Zájemci o podrobnější studium najdou ve skriptu doporučenou literaturu.

Skriptum zahrnuje vedle výkladových částí i příklady. Tyto příklady jsou neoddelitelnou částí textu a jejich prostudování je nezbytné pro osvojení prezentovaných poznatků.

Skriptum vzniklo na základě našich přednášek, které jsou součástí předmětu "Seminář z teorie fyzikálních měření", na matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Na jeho vypracování však má nezanedbatelný podíl řada našich spolupracovníků a posluchačů MFF UK. Dovolujeme si jim touto cestou poděkovat. Naše zvláštní poděkování patří doc.dr.E.Svobodovi, CSc., vedoucímu katedry didaktiky fyziky MFF UK v Praze, za všestrannou podporu a pomoc při zpracování skriptu a dr. J.Kunzfeldovi, CSc., odbornému asistentu z katedry fyziky a didaktiky fyziky PŘF UP v Olomouci, za svědomité provedení recenze a za cenné připomínky k textu. V neposlední řadě bychom chtěli poděkovat sekretářce katedry didaktiky fyziky MFF UK V.Máčelové za pozorné, pečlivé a rychlé přepsání předloh z rukopisu a posluchačce MFF UK E. Caithamlové za nakreslení obrázků.

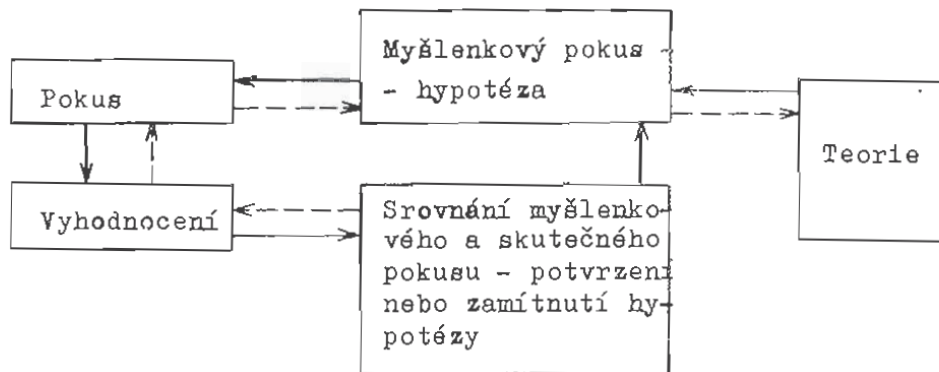
Čtenáře prosíme, aby nám sdělili své připomínky k textu skriptu.

Praha, září 1985

Autoři

1. Význam pokusu v procesu fyzikálního poznávání

Fyzika je přírodní věda; jejím úkolem je poznávání základních a univerzálních vlastností hmoty. Je to věda exaktní a kvantitativní. Cesty, jimiž se fyzikální věda ubírá, mají experimentální i teoretický charakter. Vztah těchto dvou metod poznání je schematicky znázorněn na obr. 1.



Obr. 1. Cyklicky se opakující teoretické a experimentální postupy ve fyzikálním poznávání

Základním zdrojem poznání ve fyzice je experiment neboli pokus. Z teorie vyplývá, co je (a co není) předmětem zkoumání, tj. pomocí jakých základních pojmů a vztahů daný vědní obor modeluje objektivní realitu, a základní zákonitosti. (Tak např. mezi základní pojmy mechaniky patří hmotnost, délka, čas, síla, rychlost, hmotný bod atd., základními zákony jsou např. Newtonovy pohybové zákony.) Z nich lze odvodit předpovědi (hypotézy) týkající se nějaké speciální situace (např. zákony pádu tělesa ve vakuu v zemském gravitačním poli); odvození hypotéz probíhá v tzv. myšlenkovém experimentu. Ke zjištění souhlasu či nesouhlasu hypotéz se skutečnými, reálnými ději provádíme vlastní pokus (např. studiem pohybu reálného kyvadla), jehož součástí je zpravidla měření (např. doby kyvu v závislosti na délce závěsu, hmotnosti a materiálu tělesa atd.). Získané výsledky je třeba vyhodnotit a porovnat s hypotézou. Pokud dospějeme k souhlasu je pokus ověřením teorie a jeho výsledky mohou přispět i k jejímu dalšímu rozvíjení. Je-li výsledkem srovnání nesouhlas, je potřeba se vrátit a hledat jeho příčinu nejprve ve způsobu vyhodnocení, dále v samotném pokusu, v odvození hypotézy či v samotné teorii.

Z hlediska obecného poznání je cílem pokusu prověřit vybraný dílčí zá-
ě teorie srovnáním s výsledky měření. Z hlediska praxe je cílem pokusu
již existující teorie napsat vysvětlení určitého dílčího jevu. S tím sou-
visejí hlavní charakteristické znaky pokusu:

a.) záměrná vyběrovost (vybíráme podmínky, za nichž má sledovaný proces proběhnout a rovněž vybíráme sledované veličiny),

b) možnost ověření závěrů opakováním (každou praxi chápeme jako společensko-historickou, každou teorii jako její dílčí abstraktní model; proto je vědeckou povinností umožnit prověření získaných závěrů zveřejněním všech nezbytných informací o teoretických předpokladech, praktickém provedení a způsobu vyhodnocení pokusu).

Fyzikální pokusy mohou být kvalitativní nebo kvantitativní. Výsledkem kvalitativního pokusu je kvalitativní zjištění (jev nastal či nenastal, pokusný objekt - vzorek - má nebo nemá danou vlastnost apod.). Při kvantitativním neboli měrném pokusu se sledují velikosti pozorovaných vlastností a změn. Pro současnou fyziku jsou typické právě pokusy kvantitativní, jejichž výsledky jsou podmínkou pro formulaci a ověřování teoretických závěrů v matematické podobě.

2. Fyzikální veličiny a jejich jednotky

2.1 Fyzikální veličiny

Velikost sledovaných vlastností nebo jejich změn vyjadřujeme pomocí fyzikálních veličin. Konkrétní tvar takového vyjádření závisí na tom, z jaké soustavy veličin a jednotek přitom vycházíme.

Fyzikální veličiny charakterizují objektivní vlastnosti předmětů a jejich stavů, které lze kvalitativně rozpoznat od jiných a kvantitativně určit.

Fyzikální veličiny v sobě proto zahrnují jak údaj o kvantitě dané vlastnosti, tak o její kvalitě; jeden údaj bez druhého není fyzikální veličinou. Symbolicky to můžeme zachytit vztahem

$$x = \{x\} \cdot [x], \quad (1)$$

kde x znamená fyzikální veličinu, $\{x\}$ její číselnou hodnotu a $[x]$ jednotku.

Fyzikální veličiny můžeme podle jejich povahy rozdělit na extenzivní, intenzivní a protenzivní.

- Extenzivní veličiny (veličiny kvantity, množství) jsou ty, které můžeme považovat za část větších celků nebo za součet menších částí. Patří mezi ně např. délka, hmotnost, energie, síla, moment setrvačnosti, elektrický náboj aj.
- Intenzivní veličiny (veličiny kvality, stavové) vyjadřují fyzikální stavy. Patří mezi ně např. termodynamická teplota, tlak, elektrické napětí, intenzita elektrického či magnetického pole apod.
- Protenzivní veličiny se spojitě mění a jejich zpětná reprodukce není možná. Takovou povahu má čas.

Fyzikální veličiny můžeme rozlišovat ještě podle jiných hledisek. Např. podle oblasti měření hovoříme někdy o veličinách mechanických, elektrických, optických atd. Toto rozdělení však není jednoznačné, protože s řadou veličin pracujeme při měření v různých oblastech.

Podle fyzikálně matematického charakteru mohou mít fyzikální veličiny různý počet složek. Podle počtu složek rozlišujeme veličiny skalární, vektorové a tenzorové.

Skalární veličiny (skaláry) mají jednu složku. Jsou to např. hmotnost, délka, teplota, čas, permitivita homogenního dielektrika.

Vektorové veličiny (vektory) mají obvykle tři složky (pokud s nimi pracujeme v třírozměrném prostoru). Patří mezi ně např. síla, moment síly, hybnost.

Tenzorové veličiny (tenzory) mají 3^n složek, kde n se nazývá řád tenzoru. Tenzor 2. řádu má tedy 9 složek, tenzor 3. řádu 27 složek. Vektor bychom mohli ve shodě s tím chápat jako tenzor 1. řádu ($3^1 = 3$ složky) a skalár jako tenzor 0-tého řádu ($3^0 = 1$ složka). Tenzorem 2. řádu je např. permitivita anizotropního dielektrika, tenzor hybnosti tuhého tělesa (který popisuje pohybový stav tělesa obecněji než odpovídající veličina vektorová).

Složky fyzikální veličiny jsou všechny stejného druhu - vyjadřují stejnou kvalitu - a každá z nich zahrnuje číselnou hodnotu i jednotku. Pro každou složku tedy platí symbolický vztah (1).

Mezi všemi fyzikálními veličinami lze vybrat některé, které jsou vzájemně nezávislé a z nichž je možné všechny ostatní odvodit. Takové veličiny nazýváme základní, ostatní pak odvozené. Soustavy základních a odvozených veličin je možné zvolit různým způsobem. Za základní veličiny se obvykle používají ty, pro něž se snadno popíše způsob jejich měření a které jsou pokud možno dobře pochopitelné z běžné zkušenosti. V posledních letech byla jedna z takových možných soustav přijata na základě mezinárodních dohod a v mnoha zemích, mj. i u nás, bylo její výhradní používání stanoveno zákonem. Je to soustava veličin a jednotek SI.

2.2 Jednotky fyzikálních veličin. Soustava SI

Při fyzikálním měření srovnáváme (poměřujeme) neznámou veličinu se zvolenou veličinou stejného druhu, kterou nazýváme jednotkou fyzikální veličiny. Pro měření dané veličiny lze použít různých jednotek. Středověký kupec měřil např. délku kusu látky v loktech či sázích, které se mnohdy lišily od města k městu; setkáte-li se s anglickým fyzikálním textem, najdete v něm často jako jednotky délky palec, stopu, či yard; u nás jsme zvyklí používat jako jednotku délky metr.

Volba jednotky fyzikální veličiny je otázkou dohody. Ve fyzice má tato dohoda o jednotkách mezinárodní charakter. V Československu je uzákoněna zákonem 35/62 Sb. a zavedena normou ČSN 01 1300 "Zákonné měřicí jednotky" od 1.1.1980. Tato mezinárodní soustava jednotek SI (Systém International d'Unités) je založena na soustavě veličin obsahující 7 veličin základních, 2 veličiny doplňkové (o nichž dosud není rozhodnuto, zda patří mezi základní nebo odvozené) a odvozené veličiny. Soustavě veličin odpovídá soustava jednotek: pro základní veličiny jsou vhodně voleny a definitoricky stanoveny základní jednotky, pro doplňkové veličiny jednotky doplňkové a pro odvozené veličiny jednotky odvozené.

U každé veličiny a jednotky rozlišujeme název a značku. Názvy a značky veličin a jednotek jsou stanoveny státní normou. Pro základní a doplňkové veličiny soustavy SI jsou uvedeny v tabulce 1, pro některé odvozené veličiny v tabulce 2. (Všimněte si, že některé názvy jednotek jsou odvozeny od vlastních jmen; píšeme je však vždy s malým písmenem na začátku. Značkami těchto jednotek však jsou velká písmena.)

Tabulka 1. Základní a doplňkové fyzikální veličiny a jejich jednotky v soustavě SI

	Veličiny			Jednotky	
	Název	Značka	Rozměrový symbol	Název	Značka
Základní	délka	l, a	L	metr	m
	hmotnost	m, M	M	kilogram	kg
	čas	t, τ	T	sekunda	s
	elektrický proud	I	I	ampér	A
	termodynamická teplota	T, Θ	Θ	kelvin	K
	látkové množství	n	N	mol	mol
	svítivost	I	J	kandela	cd
Doplňkové	rovinný úhel	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$		radián	rad
	prostorový úhel	Ω		steradián	sr

2.2.1 Základní jednotky soustavy SI

Na základě mezinárodní dohody jsou přijaty následující definice základních jednotek:

Metr je délka dráhy proběhnuté ve vakuu světlem za dobu $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekundy.

Kilogram je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu, který je uložen v Mezinárodním úřadě pro váhy a míry v Sèvres.

Sekunda je doba trvání 9 192 631 770 period záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu atomu cesia 133.

Ampér je elektrický proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými primými velmi dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 m od sebe, vyvolá mezi vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7} \text{ m.kg.s}^{-2}$ ($2 \cdot 10^{-7}$ newtonů) na 1 m délky.

x) Při revizi ČSN 01 1300 v roce 1985 bylo navrženo zařadit doplňkové jednotky mezi jednotky odvozené.

Kelvin je 273,16tá část termodynamické teploty trojného bodu vody.

Mol je látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku 12.

Kandela je svítivost zdroje, který v daném směru vysílá monochromatické záření o kmitočtu $540 \cdot 10^{12}$ hertzů, a jehož zářivost v tomto směru je 1/683 wattu na steradián.

2.2.2 Doplňkové jednotky soustavy SI

Radián je rovinný úhel tvořený dvěma polopřímkami, které na kružnici opsané z jejich počátečního bodu vytínají oblouk o délce rovne jejímu poloměru.

Steradián je prostorový úhel s vrcholem ve středu kulové plochy, který na této kulové ploše vytíná část s obsahem rovným druhé mocnině poloměru této kulové plochy.

2.2.3 Odvozené veličiny a jednotky soustavy SI

Ze sedmi základních veličin soustavy SI lze všechny ostatní fyzikální veličiny odvodit pomocí definičních fyzikálních vztahů (zapsaných obvyklým způsobem ve formě veličinových rovnic, tj. pomocí značek veličin). Analogicky je možné získat jejich jednotky - odvozené jednotky SI. V tabulce 2 jsou uvedeny názvy a značky několika příkladů odvozených fyzikálních veličin a jejich jednotek.

Tabulka 2. Některé odvozené veličiny soustavy SI a jejich jednotky

Veličina		Jednotka	
Název	Značka	Název	Značka
objem	V	krychlov metr	m^3
frekvence	f	hertz	Hz
rychlost	\vec{v}	metr za sekundu	$m \cdot s^{-1}$
uhlová rychlost	ω	radian za sekundu	$rad \cdot s^{-1}$
tlak	p	pascal	Pa
mechanické napětí	$\vec{\sigma}, \vec{\tau}$	pascal	Pa
výkon	P	watt	W
moment síly	\vec{M}	newton metr	$N \cdot m$
moment dvojice sil	\vec{D}	newton metr	$N \cdot m$
elektrické napětí	U	volt	V
elektromotorické napětí	U_e	volt	V
elektrický potenciál	φ	volt	V
intenzita elektrického pole	\vec{E}	volt na metr	$V \cdot m^{-1}$
elektrická indukce	\vec{D}	coulomb na čtverečný metr	$C \cdot m^{-2}$

Pokračování tabulky 2

Veličina		Jednotka	
Název	Značka	Název	Značka
permitivita	ϵ	farad na metr	$F.m^{-1}$
permeabilita	μ	henry na metr	$H.m^{-1}$
magnetický indukční tok	Φ	weber	Wb
magnetická indukce	\vec{B}	tesla	T
intenzita magnetického pole	\vec{H}	ampér na metr	$A.m^{-1}$
tepelná kapacita	K, C	joule na kelvin	$J.K^{-1}$
měrná tepelná kapacita	c	joule na kilogram a kelvin	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
osvětlení	E	lux	lx

2.2.4 Násobky a díly jednotek

V některých případech je použití základní nebo odvozené jednotky nepohodlné, protože daná jednotka je buď příliš malá nebo velká a číselný údaj by byl nepřehledný. Pak je výhodné použít násobků nebo dílů jednotek.

Násobky a díly se tvoří pomocí předpon, které se připojují před název jednotky a tvoří s ním jedno slovo. Použití předpon je také předmětem mezinárodní dohody a u nás je stanoveno normou.

Převážně se používá násobků a dílů tvořených s koeficientem $10^{\pm 3n}$, kde n je přirozené číslo. Pripouští se však použití dalších násobků a dílů - tvořených s koeficientem $10^{\pm 1}$ a $10^{\pm 2}$. Přehled násobků a dílů jednotek a příslušných předpon v soustavě SI je uveden v tabulce 3.

Tabulka 3. Předpony SI a odpovídající násobky a díly jednotek

Předpona			Předpona			Předpona		
Název	Značka	Znamená násobek	Název	Značka	Znamená díl	Název	Značka	Znamená násobek (díl)
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}	hekto	h	10^2
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}	deka	da	10^1
tera	T	10^{12}	piko	p	10^{-12}	deci	d	10^{-1}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}	centi	c	10^{-2}
mega	M	10^6	mikro	μ	10^{-6}			
kilo	k	10^3	mili	m	10^{-3}			

Předpony se mají připojovat vždy k prvé z jednoduchých jednotek, jimiž je daná odvozená veličina vyjádřena. Např. jednotka intenzity elektrického pole může být $kV.m^{-1}$, jednotka zrychlení $cm.s^{-2}$. Výjimečně je možné u násobků nebo dílů jednotek často používaných připojit předponu i k dalším jednoduchým jednotkám vyjadřujícím odvozenou jednotku, jako např. u jednotek intenzity elektrického pole $V.cm^{-1}$ nebo měrného elektrického odporu $\Omega.cm$.

2.2.5 Vedlejší a neplatné jednotky

Běžně se v každodenním životě, v technické praxi i ve starší literatuře setkáváme s jednotkami fyzikálních veličin, které nepatří do soustavy SI. Z nich některé státní norma připouští - ty, jejichž použití je všeobecně vžitě a které jsou výhodné v určitých speciálních oblastech. Jsou to tzv. vedlejší jednotky. Jejich úplný seznam je uveden v tabulce 4. Kromě nich je možné používat jednotky kombinované z vedlejších jednotek nebo z vedlejších jednotek a jednotek SI, např. $l \cdot h^{-1}$, $kg \cdot l^{-1}$.

Tabulka 4. Vedlejší jednotky a jejich vztah k jednotkám SI

Veličina	Vedlejší jednotka		Vztah k jednotkám SI
	Název	Značka	
Čas	minuta ^{x)}	min	1 min = 60 s
	hodina ^{x)}	h	1 h = 60 min = 3600 s
	den ^{x)}	d	1 d = 24 h = 86400 s
Rovinný úhel	stupeň ^{x)}	(°)	1° = ($\pi/180$)rad (přesně)
	minuta ^{x)}	(')	1' = (1/60)° = ($\pi/10800$)rad (přesně)
	vteřina ^{x)}	('')	1'' = (1/60)' = ($\pi/648000$)rad (přesně)
	grad ^{x)}	(g)	1g = ($\pi/200$)rad (přesně)
Objem	litr	l	1 l = 1 dm ³ = 10 ⁻³ m ³
Hmotnost	tuna	t	1 t = 10 ³ kg
Plošný obsah	hektar	ha	1 ha = 10 ⁴ m ²
Optická mohutnost	dioptrie ^{x)}	D	1 D = 1 m ⁻¹
Zdánlivý výkon	voltampér	V.A	1 V.A = 1 W
Jalový výkon	var	var	1 var = 1 W
Energie	elektron-volt	eV	1 eV = 1,60219 · 10 ⁻¹⁹ J
Atomová hmotnostní konstanta	atomová hmotnostní jednotka ^{x)}	u	1 u = 1,66057 · 10 ⁻²⁷ kg
Délka	astronomická jednotka ^{x)}	UA	1 UA = 1,49598 · 10 ¹¹ m
	parsek	ps	1 ps = 3,0857 · 10 ¹⁶ m
	světelný rok ^{x)}	ly	1 ly = 9,4605 · 10 ¹⁵ m

^{x)} U těchto jednotek nelze používat předpony.

Další jednotky, s nimiž se můžeme ještě někdy setkat a které nepatří ani mezi jednotky SI, ani mezi vedlejší jednotky, jsou tzv. neplatné jednotky. Jejich přehled je uveden v tabulce 5. Používání neplatných jednotek norma nepovoluje.

Tabulka 5. Neplatné jednotky

Veličina	Neplatná jednotka		Vztah k jednotkám SI
	Název	Značka	
Plošný obsah	ar	a	1 a = 10^2 m^2
	barn	b	1 b = 10^{-28} m^2
Síla	kilopond	kp	1 kp = 9,80665 N (přesně)
Tlak	kilopond na čtverečný metr	kp.m ⁻²	1 kp.m ⁻² = 9,80665 Pa (přesně)
	kilopond na čtverečný centimetr	kp.cm ⁻²	1 kp.cm ⁻² = 9,80665.10 ⁴ Pa (přesně)
	torr	torr	1 torr = 133,322 Pa (přesně)
	bar	bar	1 bar = 10 ⁵ Pa
Mechanické napětí	kilopond na čtverečný milimetr	kp.mm ⁻²	1 kp.mm ⁻² = 9,80665.10 ⁶ Pa (přesně)
Teplo	kalorie	cal	1 cal = 4,1868 J (přesně)
Tíhové zrychlení	gal	Gal	1 Gal = 1 cm.s ⁻²
Dynamická viskozita	poise	P	1 P = 0,1 Pa.s
Kinematická viskozita	stok	St	1 St = 1 cm ² .s ⁻¹
Magnetická indukce	gauss	G	1 G = 10 ⁻⁴ T
Intenzita magnetického pole	oersted	Oe	1 Oe = (1000/4π) A.m ⁻¹ (přesně)
Magnetický indukční tok	maxwell	M	1 M = 10 ⁻⁸ Wb
Dávka	rad	rad	1 rad = 10 ⁻² Gy
Aktivita	curie	Ci	1 Ci = 3,7.10 ¹⁰ Bq (přesně)
Ozáření	rentgen	R	1 R = 2,58.10 ⁻⁴ C.kg ⁻¹

2.3 Rozměry fyzikálních veličin. Rozměrové a bezrozměrové veličiny

Pro charakteristiku odvozených veličin a jejich vztahu k základním veličinám je někdy užitečné použít jejich rozměr (dimenzi).

Každé ze základních veličin je přiřazen určitý rozměrový symbol (rozměrové symboly základních veličin soustavy SI jsou uvedeny v tabulce 1).

Rozměrem fyzikální veličiny vzhledem k základním veličinám pak nazýváme formální součin všech rozměrových symbolů s příslušnými exponenty a označujeme jej D.

Použití rozměrů fyzikálních veličin může být užitečné např. při přípravě měření, pro kontrolu, zda veličiny, které chceme měřit a pro které jsme odvodili potřebné vztahy, mají skutečně rozměr charakteristický pro danou veličinu. Na druhé straně je nutné při práci s rozměry zachovávat určitou opatrnost, protože v některých případech mají veličiny, které se svou kvalitou podstatně liší, stejný rozměr (viz příklad 1).

Při zápisu rozměru fyzikální veličiny se činitel s mocnitelem nula zpravidla nezapisuje. Jsou-li všechny mocnители ve fyzikálním rozměru nulové, říkáme, že daná veličina je bezrozměrová (nebo že má rozměr 1), ostatní veličiny nazýváme rozměrové.

Někdy se pro zjednodušení pracuje místo s rozměrovými symboly základních veličin se značkami základních jednotek - a místo rozměru dané veličiny se pak používá vyjádření jednotky dané veličiny součinem základních jednotek SI¹⁾.

Příklad 1. Rozměry některých fyzikálních veličin a vyjádření jejich jednotek součinem základních nebo doplňkových jednotek SI.

Síla je odvozená veličina, kterou můžeme v jednoduchém případě odvodit ze základních veličin soustavy SI veličinovou rovnicí:

$$F = m a = m \frac{2s}{t^2},$$

kde F je síla, m hmotnost, a zrychlení, s dráha, t čas.

Rozměr síly dostaneme z této veličinové rovnice, dosadíme-li za značky veličin jejich rozměrové symboly:

$$D(F) = M.L.T^{-2}.$$

Podobně můžeme z této veličinové rovnice vyjádřit jednotku síly pomocí součinu jednotek základních: $N = \text{kg.m.s}^{-2}$.

Stejně i pro jiné fyzikální veličiny:

tlak p : $D(p) = L^{-1}.M.T^{-2}$, jednotka Pa = $\text{m}^{-1}.\text{kg.s}^{-2}$;

elektrický náboj Q : $D(Q) = I.T$, jednotka C = A.s;

energie E : $D(E) = M.L^2.T^{-2}$, jednotka J = $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$;

moment síly M : $D(M) = M.L^2.T^{-2}$, jednotka N.m = $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$.

Poslední dvě z uvedených veličin mají stejný rozměr, ačkoliv jsou kvalitativně odlišné; také vyjádření jejich jednotek součinem jednotek základních je stejné.

Někdy se tam, kde se ve vyjádření jednotky fyzikální veličiny objevuje doplňková jednotka, setkáme s dvojným výrazem: např. pro úhlovou rychlost rad.s^{-1} nebo jen s^{-1} . Radián je zázev jednotky rovinného úhlu, rad je značka této jednotky; rovinný úhel je přitom bezrozměrová veličina.

Proto: rad.s^{-1} je značka jednotky úhlové rychlosti,

s^{-1} je vyjádření jednotky úhlové rychlosti pomocí základních jednotek SI.

¹⁾ V základním fyzikálním praktiku vystačíme s vyjádřováním jednotek pomocí základních jednotek. Je však potřeba si uvědomovat, že se v tomto případě nejedná o rozměry fyzikálních veličin.

Příklad 2. Bezrozměrové veličiny.

a) Doplnkové veličiny - rovinný a prostorový úhel: $D(\alpha) = 1$, $D(S\Omega) = 1$.

b) Odvozené bezrozměrové veličiny jsou obvykle definovány poměrem dvou fyzikálních veličin stejného druhu. Např. relativní index lomu je dán poměrem rychlostí světla v_1 , v_2 ve dvou uvažovaných prostředích,

$$n = \frac{v_1}{v_2}$$

$$D(n) = \frac{D(v_1)}{D(v_2)} = \frac{L \cdot T^{-1}}{L \cdot T^{-1}} = 1 .$$

Příklad 3. Správné a přehledné zápisy fyzikálních veličin.

Pro rozměrovou veličinu:

$v = 3,4$ CHYBNĚ (chybí jednotka!)

$v = 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ SPRÁVNĚ

$v = 0,0000073 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ NEVHODNĚ (nepřehledně!)

$v = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ nebo

$v = 7,3 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ SPRÁVNĚ

pro bezrozměrovou veličinu

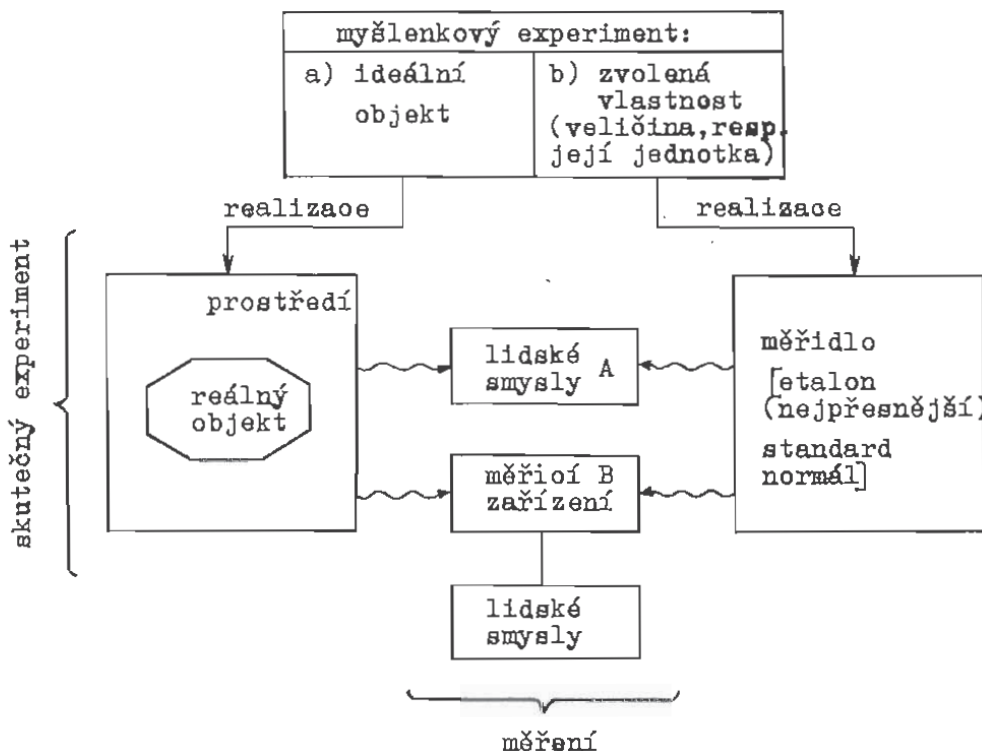
$n = 1,5$ SPRÁVNĚ

3. Metody měření

V myšlenkovém experimentu (obr. 1) určujeme, co budeme zkoumat (jaký idealizovaný objekt, resp. jakou jeho vlastnost, či jaký děj); tj. ze všeho zkoumatelného vybereme určitou část. Tento abstraktní pochod pak určuje v reálném pokusu volbu reálného zkoumaného objektu - a tím i "zbytku" objektivní reality, který nazveme prostředím, v němž se náš reálný objekt nachází (okolím objektu). Ze všech možných vlastností objektu sledujeme jen některé, a to za určitých vnějších podmínek, určených fyzikálními vlastnostmi jeho okolí (z nichž opět obvykle sledujeme jen některé), a to zpravidla z kvantitativního hlediska. Provádíme tedy měření.

Měření je soubor experimentálních úkonů, jejichž účelem je stanovit hodnotu měřené veličiny (měření hodnot jednotlivých veličin nebo určení funkčního vztahu mezi několika veličinami). Při měření se zjišťuje velikost měřené veličiny ve zvolených jednotkách.

Abychom mohli měřit fyzikální vlastnosti, musíme porovnat působení zkoumaného objektu (předmětu, děje) s působením jiného (měrného) objektu - měřidla, který je realizací (ztělesněním) odpovídající fyzikální jednotky. Schematicky je to zachyceno na obr. 2.



Obr. 2. Měření

Při subjektivním měření se srovnává působení bezprostředně na lidské smysly, při objektivním měření na měřicí zařízení. Pro moderní vědu je typická snaha o objektivizaci měření, tj. zmenšení úlohy lidských smyslů v měření.

Každé měření je založeno na určitém fyzikálním jevu, kterému říkáme měřicí princip. Tak při měření teploty může být měřicím principem např. teplotní roztažnost nebo termoelektrický jev. Způsob, jakým pak na základě měřicího principu danou fyzikální veličinu měříme, se nazývá měřicí metoda.

Měřicí metody můžeme klasifikovat podle různých hledisek. Tak např. rozlišujeme:

1. Metody přímé a nepřímé. Za přímé se označují takové metody, při nichž se hodnota měřené veličiny zjišťuje přímým srovnáváním se známou hodnotou téže veličiny. Přímé je např. měření délky pomocí různých délkových měřítek, měření elektrického odporu porovnáním s normálem elektrického odporu, měření hustoty kapalin hustoměry, měření hmotnosti vážením.

Při nepřímých měřeních se hodnota měřené veličiny stanoví na základě určitého fyzikálního vztahu z hodnot jiných veličin (změřených jinou metodou). Nepřímou metodou měříme např. elektrický odpor na základě Ohmova zákona pomocí hodnot proudu a napětí, hustotu kapaliny pomocí hodnot její hmotnosti a objemu.

Někdy se o přímých a nepřímých metodách měření hovoří z jiného hlediska. Za přímé se označují ty metody, při nichž se měřená veličina určí na základě definičního vztahu. Ostatní metody, které vycházejí z jiných vztahů než definičních, jsou pak nepřímé. Přímou metodou v tomto pojetí je např. měření hustoty tělesa pomocí jeho hmotnosti a objemu, měření rychlostí rovnoměrného pohybu na základě času a uražené dráhy, měření elektrického proudu na základě Ohmova zákona. Naproti tomu nepřímé je např. měření hustoty tělesa na základě Archimedova zákona - z údajů o síle, kterou těleso je nadlehčováno v kapalině známé hustoty a o tíze tělesa ve vzduchu. Jiným příkladem nepřímé metody je měření elektrického odporu pomocí proudu a Jouleova tepla vyvinutého za určitou dobu, nebo měření rychlostí zvuku z kmitočtu a vlnové délky.

S prvním z uvedených pojetí přímých a nepřímých metod se setkáme v kap. 4, při určování chyb měření.

2. Metody absolutní a relativní (srovnávací). Absolutními metodami nazýváme ty, jimiž určujeme hodnotu měřené veličiny v příslušných jednotkách. Relativními metodami měříme poměr dvou veličin stejného druhu. Jsou to tedy metody srovnávací, jimiž se porovnávají dvě hodnoty téže veličiny. Např. absolutní metodou určujeme elektrický odpor z Ohmova zákona jako podíl změřeného napětí a proudu; určení hodnoty elektrického odporu můstkovou metodou, kdy bezprostředním výsledkem měření je zjištění poměru hodnot měřeného a srovnávacího odporu, je příkladem relativní (srovnávací) metody.

Při srovnávacím měření můžeme ovšem získat také hodnotu měřené veličiny v příslušných jednotkách, máme-li k dispozici pro srovnání jednotkovou veličinu, nebo alespoň veličinu, jejíž velikost v daných jednotkách známe. Proto se pro některé fyzikální veličiny zhotovují přesné míry, které se nazývají etalony, normály nebo standards. Takovými etalony jsou např. závaží, normály elektrického odporu, kapacity.

3. Metody statické a dynamické. U statických metod určujeme hodnotu měřené veličiny z klidového údaje přístroje, u metod dynamických z periodického pohybu měřicího systému. Statickou metodou měříme např. tuhost pružiny k pomocí vztahu $k = \frac{G}{x_0}$, z údaje o tíze G tělesa, které je v klidu zavěšeno na pružině, a protažení pružiny x_0 . Tuhost pružiny můžeme určit i dynamickou metodou pomocí vztahu $k = m\omega^2$; k tomu je potřeba určit úhlovou frekvenci ω tělesa o hmotnosti m kmitajícího na pružině.
4. O metodě substituční hovoříme tehdy, nahrazujeme-li měřený objekt normály o známých hodnotách veličiny téhož druhu, až dosáhneme stejného efektu jako od samotného měřeného objektu. Normály pro měření substituční metodou jsou uspořádány do sad tak, aby z jejich hodnot bylo možné jednoduchou kombinací sestavit libovolnou hodnotu. Nejčastěji se užívají sady desetinné soustavy, např. s číselnými hodnotami: 1, 1,1, 2, 5, 10, 10, 20, 50, 100, 100, 200, 500, atd. Takové sady tvoří např. závaží a kapacitní, odporové či indukční dekády.

5. Při metodě kompenzační kompenzujeme (vyrovnáváme) efekt měřeného objektu stejně velkým efektem opačného znaménka pomocí normálu veličiny stejného druhu. Mezi kompenzační metody lze např. zařadit měření elektrického odporu Wheatstonovým můstkem. Zvláštním případem kompenzační metody je metoda nulová, při níž jsou oba efekty přesně v rovnováze a výchylka indikačního přístroje je nulová. Nulovou metodou je právě měření elektrického odporu Wheatstonovým můstkem, ale i např. vážení.

Měřicí metody lze klasifikovat i podle dalších hledisek; tak např. podle způsobu indikace výsledku měření dělíme metody na analogové a digitální apod.²⁾

4. Chyby měření

4.1 Zdroje chyb měření

Účelem měření je stanovit hodnotu nějaké fyzikální veličiny pro daný objekt či jev za daných podmínek. Srovnáme-li teoretickou předpověď hodnoty této veličiny s hodnotou změřenou nebo srovnáme-li několik změřených hodnot mezi sebou, můžeme mezi nimi zjistit odchylky. Zdroje těchto odchylek lze hledat v kterémkoli místě řetězu vedoucího od teorie ke skutečnému pokusu a zpět (obr. 1). Je tedy například možné, že odchylka byla vyvolána chybou v teorii, nebo že jsme se v myšlenkovém experimentu dopustili chybných úvah o možných výsledcích měření. S těmito případy, jakkoliv důležitými, se však setkáváme tak zřídka, že se jimi v dalším výkladu nebudeme zabývat. Ve zbývajících případech nazveme odchylky mezi (předpokládanou) jedinou skutečnou hodnotou měřené veličiny - příslušnou danému objektu (jevu) za daných podmínek - a mezi hodnotami naměřenými chybou měření; říkáme, že naměřené hodnoty jsou zatíženy chybou.

Zdrojem chyb měření může být:

- měřený objekt,
- prostředí (okolí objektu),
- měřicí metoda,
- měřicí zařízení,
- pozorovatel (experimentátor),
- způsob vyhodnocení výsledků.

Chyby způsobené měřeným objektem vyplývají často z toho, že objekt nemá dokonalý geometrický tvar nebo není ideálně homogenní. Např. při měření poloměru drátu se může projevit, že drát nemá po celé své délce dokonalý kruhový průřez stejných rozměrů.

Prostředí může ovlivnit chybu naměřených hodnot tím, že jeho charakteristiky nemají předpokládanou hodnotu nebo že se tato hodnota v průběhu měření mění. Nejčastěji to bývá teplota prostředí, která může znatelně ovliv-

²⁾ Podrobně jsou různé měřicí metody popsány např. ve skriptu [2] a v knihách [3], [4] a [6].

nit např. výsledky při měření viskozity, povrchového napětí aj.

Další příčinou může být nedokonalost měřicí metody. Obvykle je tomu tak tehdy, neodpovídají-li podmínky skutečného pokusu dostatečně přesně předpokladům, za nichž byla metoda teoreticky odvozena. Např. při vážení nebereme někdy v úvahu vztlakovou sílu působící ve vzduchu na vážené předměty. Chyba, které se tím dopouštíme, je malá u těles, jejichž hustoty se příliš neliší od hustot závaží - avšak může být značná pro tělesa s velmi odlišnými hustotami.

Také měřicí zařízení (měřidlo) je zdrojem chyb, jejichž příčinou je to, že je nikdy není možné zhotovit s absolutní dokonalou přesností. Chyba měřidla může být způsobena např. třením mezi jeho pohyblivými součástkami, jejich setrvačností, nesprávným uspořádáním rysek stupnice či nerovnomerností vahadel u vah. K chybám měřidel se podrobněji vrátíme v odst. 4.5.

Chyby způsobené pozorovatelem (chyby pozorování) vyplývají z nedokonalosti lidských smyslů. Člověk má např. omezenou rozlišovací schopnost při vidění i při vnímání časových intervalů. Do chyby měření se může také promítnout zpoždění, s nímž člověk reaguje na vnější podněty (reakční doba). Často se objevuje chyba čtení, která je způsobena nepřesným čtením údajů měřidla pozorovatelem. Chyba čtení může vzniknout např. tím, že se ukazovatel měřidla nalézá v určité vzdálenosti od stupnice a pozorovatel odečítá měřený údaj při pohledu ze strany (tzv. paralaxní chyba). Jiná chyba čtení může vzniknout tehdy, odhaduje-li pozorovatel hodnotu měřené veličiny z polohy ukazovatele mezi dvěma ryskami stupnice (tzv. chyba interpolace; viz dále odst. 4.3). Jiným původcem chyb pozorování mohou být smyslové klamy. Chyby pozorování se zvětšují s únavou pozorovatele, se špatným osvětlením, nadměrným hlukem apod.

Chyby při vyhodnocování výsledků měření vznikají použitím nevhodné vyhodnocovací metody, běžnými početními chybami nebo při jinak správném počítání nezbytným zaokrouhlováním čísel.

4.2 Druhy chyb měření

Některé z chyb, o jejichž zdrojích pojednával předchozí odstavec, je možné rozpoznat a korigovat; u jiných to však nelze. Principiálně je nemožné měřit dokonale přesně. Chyby jsou v naměřených hodnotách vždy přítomné; skutečnou hodnotu měřené veličiny nedovedeme určit. V dalším textu se budeme snažit najít postupy, jimiž lze z naměřených výsledků zatížených chybami získat informaci, která nám skutečnou hodnotu přiblíží.

Chyby měření můžeme vyjádřit jako absolutní nebo relativní.

Předpokládejme, že jsme N -krát změřili hodnotu veličiny w . Označíme-li w_i hodnotu určenou při i -tém měření ($i = 1, \dots, N$) a w^* skutečnou hodnotu veličiny w , je absolutní chyba i -tého měření \mathcal{E}_i dána jejich rozdílem:

$$\mathcal{E}_i = w_i - w^* \quad (2)$$

Ze vztahu (2) je vidět, že absolutní chyba je vyjádřena ve stejných jednotkách, v jakých měříme veličinu w .

Relativní chyba δ_i i-tého měření je definována vztahem

$$\delta_i = \frac{\varepsilon_i}{w_{\bar{x}}} \quad (3)$$

Často se tato chyba vyjadřuje v procentech:

$$\delta_i = \frac{\varepsilon_i}{w_{\bar{x}}} \cdot 100 \% \quad (3a)$$

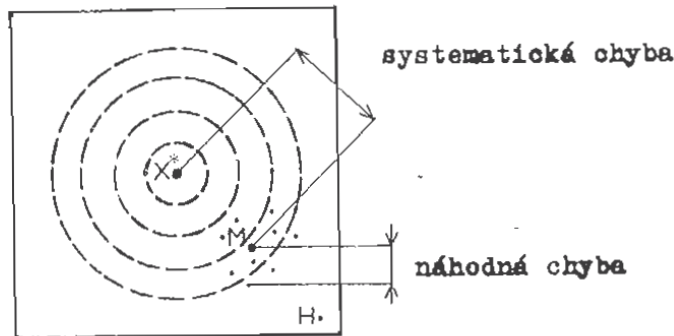
Relativní chyba je bezrozměrová veličina. Dává nám zpravidla názornější představu o kvalitě měření než absolutní chyba. Např. hodinky, které se opozdí o 1 sekundu za 1 rok, jsou zřejmě kvalitnější než hodinky, které se o 1 sekundu opozdí za 1 hodinu. Absolutní chyba je v obou případech ovšem stejná; rozdíl v kvalitě hodin se odráží v rozdílné relativní chybě.

Chyby (ať již je vyjádříme jako absolutní nebo relativní) mohou být náhodné, systematické nebo hrubé. Jejich povahu pomůže přiblížit příklad střelby na terč (obr. 3).

Uprostřed terče leží žádoucí hodnota zásahu, označená X^* . Dosažené zásahy tvoří - s výjimkou jediného označeného H - skupinu soustředěnou kolem "středu" M (nezajímá nás zatím způsob, jak M určíme; všimneme si však, že v místě M nemusí nutně být žádný skutečný zásah).

Rozdíl mezi X^* a M (např. 2 cm dolů vpravo od X^*) udává tzv. systematickou chybu. Můžeme si představit, že každý zásah je zatížen toutéž nenulovou systematickou chybou. Rozdíly mezi jednotlivými zásahy a M mají dva charakteristické rysy:

- a) mohou být různého směru (vpravo, vlevo, nahoru, dolů)
- b) velké rozdíly (poměřováno vzdáleností) jsou méně časté než rozdíly malé. Takové chyby označíme za chyby náhodné. Za zvláštní případ náhodné chyby považujeme hrubou chybu, znázorněnou rozdílem mezi M a zásahem H.



Obr. 3. Střelba do terče

Analogicky mluvíme o chybách systematických, náhodných a hrubých i v případě fyzikálních měření, i když tu existuje jeden závažný rozdíl. V případě střelby známe žádoucí hodnotu, jíž chceme zásahem dosáhnout (střed terče); není proto obtížné určit odchylky dosažených zásahů (tj. velikost systematické chyby a náhodných chyb). V případě fyzikálního měření tuto "žádoucí" - skutečnou hodnotu měřené veličiny zpravidla neznáme (s výjimkou měření známých

normálu, např. při cejchování přístrojů). Cílem měření právě je získat o ní informace ze souboru naměřených hodnot.

Při měření označujeme za systematické ty chyby, které při opakovaném měření téže veličiny, provedeném za stejných podmínek, mají stejnou absolutní hodnotu i znaménko a které se při změně podmínek mění podle určité zákonitosti. Systematické chyby se nezjistí ani nezmenší opakovaním měření, pokud se toto měření provádí za nezměněných podmínek - pouze jejich změnou, např. použitím jiného měřidla, jiné měřicí metody apod. Část systematických chyb je možné zjistit a za určitých podmínek korigovat.

Systematické chyby jsou mírou správnosti měření; měření je tím správnější, čím méně se "střed" naměřených hodnot odlišuje od skutečné hodnoty. O systematických chybách se dále pojednává v odst. 4.3.

Náhodné chyby jsou chyby, jejichž absolutní hodnota i znaménko se mění náhodným způsobem při opakovaných měřeních téže veličiny za týchž podmínek. Náhodné chyby nelze ani vyloučit, ani korigovat; promítají se do všech měření. Výsledná náhodná chyba je mírou reprodukovatelnosti měření; měření je tím lépe reprodukovatelné, čím menší jsou rozdíly mezi jednotlivými, opakovaně naměřenými hodnotami. Náhodným chybám je věnován odst. 4.4.

Výsledky měření jsou obecně vždy zatíženy jak náhodnými, tak systematickými chybami. Souhrn chyb, zahrnující jak všechny chyby systematické, tak i chyby náhodné, se nazývá nepřesnost měření. Část systematických chyb můžeme v některých případech najít a korigovat; po korekci všech známých systematických chyb je pak souhrn chyb nazýván nejistota měření. Se systematickými chybami, jejichž hodnotu nelze běžnými způsoby určit, se při výpočtu nejistoty měření počítá jako s chybami náhodnými.

K tomu, abychom ze souboru naměřených hodnot získali informace o skutečné hodnotě měřené veličiny, je potřeba určit velikosti systematické chyby i náhodných chyb. Pro určení náhodných chyb jsou vypracovány přesně určené postupy vycházející přímo z naměřených hodnot; seznámíme se s nimi v odst. 4.4. Pro určení systematické chyby taková obecná pravidla neexistují. Představu o tom, zda a jak velkou systematickou chybou je zatížen soubor měření, může poskytnout srovnání s výsledky jiných souborů měření dané veličiny - měření provedených s jinými přístroji, jinými metodami, jinými experimentátory, na jiných pracovištích. O způsobech vyhledávání systematických chyb pocházejících z různých zdrojů se podrobněji pojednává v následujícím odstavci 4.3.

Úplnou představu o skutečné hodnotě měřené veličiny získáme jen tehdy, určíme-li náhodné chyby a odhadneme-li chybu systematickou. Obojí je nezbytnou součástí vyhodnocení provedených měření.

4.3 Systematické chyby měření

Jak už jsme se zmínili v předchozím odstavci, je možné některé ze systematických chyb měření rozpoznat a korigovat; tím jsou z výsledků měření odstraněny. Nikdy si však nemůžeme být jisti, zda výsledek měření neovlivňují

další systematické chyby, které jsme nezjistili. Protože však o nich nevíme, zůstávají součástí chyb měření, které pokládáme za náhodné.

I když s nerozpoznanými systematickými chybami zacházíme jako s náhodnými, neznamená to, že změnily své vlastnosti. Vždy proto mohou systematicky jedním směrem ovlivňovat výsledek měření - způsobem, který se nám nepodařilo zjistit. Proto je potřeba věnovat identifikaci a odstranění systematických chyb z výsledku měření velkou pozornost. Je to obtížné, protože - na rozdíl od určování náhodných chyb - nemáme pro hledání chyb systematických k dispozici jednoznačné návody.

V dalším textu vyšetříme některé vlastnosti systematických chyb, které nám ukáží určité možnosti jejich identifikace. Budeme se zabývat systematickými chybami ze dvou hledisek: všimneme si jednak jejich zdrojů, jednak jejich změn v průběhu měření.

Chybu měření vyvolanou kterýmkoli zdrojem chyb můžeme rozdělit na část systematickou a část náhodnou.

Systematické chyby metody mohou být důsledkem nepřesnosti, přibližnosti vztahů použitých pro popis měřeného objektu za daných podmínek. Příčinou může být i neadekvátnost použitého teoretického modelu v dané experimentální situaci. Např. při měřeních s kyvadlem používáme vztahy odvozené pro nekonečně malý rozkvyv. Neadekvátní může být zákon volného pádu uplatněný při popisu pohybu tělesa padajícího ve viskózním prostředí, kde na ně působí velké odporové síly. Jiná ukázka systematické chyby metody a její korekce je uvedena v příkladu 4.

Systematické chyby, jejichž zdrojem je metoda měření, je obvykle možné odstranit zpřesněním používaných vztahů, výpočtem a korekcí chyby, nebo volbou jiné metody měření.

Systematické chyby měřidel jsou způsobeny jejich nedokonalým provedením nebo nesprávným použitím. Příkladem může být nepřesně narýsovaná stupnice, závaží pokrytá nečistotou nebo opotřebovaná dlouhým používáním, nestejná délka ramen vah apod. Systematické chyby mohou mít příčinu i v nesprávné poloze přístrojů při měření a ve vzájemném ovlivňování přístrojů.

Korekci systematických chyb měřidel je možné provést pomocí přesnějších měřidel, jak je to např. popsáno v odst. 4.5.2. Lze ji vyjádřit třeba ve formě korekční tabulky, obsahující dvojice hodnot naměřených korigovaným a srovnávacím měřidlem, či ve formě korekční křivky, v níž jsou zaznamenány vzájemné odchylky hodnot zjištěných oběma měřidly v závislosti na velikosti hodnoty měřené veličiny. Protože systematické chyby měřidel se mohou s časem měnit, např. vlivem opotřebení apod., je třeba srovnání s přesnějšími měřidly (cejchování) po určité době opakovat.

Systematické chyby pozorování vyplývají z nedokonalých pozorovacích možností člověka a někdy i ze špatných přístupů a návyků experimentátora. Např. mezi ně patří už zmíněná paralaxní chyba, která vznikne, dívá-li se experimentátor při odečítání hodnot na stupnici šikmo. Systematické chyby pozorování mohou mít příčinu i v omezené rozlišovací schopnosti oka a v reakční době. Pozorovatel někdy dělá systematickou chybu při odhadu zlom-

ků dílku stupnice (chyba interpolace) - např. při odhadu desetiny dílku dává někdo přednost určitým hodnotám: u středu dílku se rozhoduje spíše pro odhad 0,4 nebo 0,6, kdežto jiný pozorovatel dává s významně vyšší frekvencí přednost odhadu 0,5.

Chyby pozorování lze odstranit, budeme-li místo subjektivního měření provádět měření objektivní (srov. kap. 3). Pokud to není možné, je částečná cesta k odstranění systematických chyb pozorování v opakování měření jinými osobami za jinak stejných podmínek.

Okolí měřeného objektu se obvykle stává zdrojem systematických chyb tím, že ovlivňuje měřený objekt nekontrolovaným způsobem. Častým takovým vlivem je teplota okolí - např. při měření povrchového napětí se může teplota vzorku, změřená na počátku, v průběhu měření pod vlivem teploty okolního prostředí měnit. Snažíme se proto pro vyloučení těchto systematických chyb mít pod kontrolou pokud možno všechny faktory okolí, které by měření mohly ovlivnit. Do záznamu naměřených hodnot, který pořizujeme při měření, zapíšeme pro jistotu i teplotu, vlhkost a tlak vzduchu v laboratoři, případně i další podmínky, které považujeme za významné.

Systematické chyby při vyhodnocování mohou vzniknout např. ze zaokrouhlování a při použití přibližných numerických metod výpočtů. Jejich příčinou může být samozřejmě i početní chyba. Lze se jim vyhnout správným zaokrouhlováním čísel, použitím jiných numerických metod nebo výpočtem či odhadem odchylky přibližného výpočtu - a ovšem také tím, že vždy zkontrolujeme správnost výpočtu. Výpočetní chyby mohou vzniknout tehdy, použijeme-li k vyhodnocení naměřených hodnot elektronických kalkulátorů nebo počítačů. Jejich zdrojem často bývá stisknutí chybné klávesy, použití nesprávného programu aj.

Při pohledu z druhého hlediska rozlišíme mezi systematickými chybami chyby konstantní a proměnné. Konstantní systematické chyby mají v průběhu měření pro všechny hodnoty měřené veličiny stálou velikost. Naproti tomu proměnné systematické chyby se v průběhu měření a v závislosti na hodnotě měřené veličiny mění podle nějakého zákona. (Nemohou se měnit náhodně; pak by to nebyly systematické, ale náhodné chyby.) Mohou být rostoucí, klesající, periodické apod.

Mezi konstantní systematické chyby patří často chyby pozorování rutinovaných experimentátorů, kteří si zafixovali určité pevné návyky a přístupy k měření. Chyby pozorování nezkušených experimentátorů jsou obvykle proměnné, a dokonce mohou mít charakter chyb náhodných. Konstantní systematické chyby mohou být také mezi chybami měřidel, např. u nepřesných závaží.

Příklad proměnné chyby najdeme na obr. 15; jiným příkladem může být chyba způsobená poklesem napětí akumulátoru v průběhu nějakého elektrického měření.

Nejpodstatnější, a také nejčastější jsou konstantní systematické chyby - a právě ty lze hůře rozpoznat než chyby proměnné. Je možné se o to pokusit např. srovnáním alespoň dvou výsledků měření téže veličiny, získaných odlišnými způsoby. Jednou z možností je např. srovnání získaného výsledku s výsledkem, který naměřil jiný experimentátor v jiné laboratoři. Ve fyzikálním

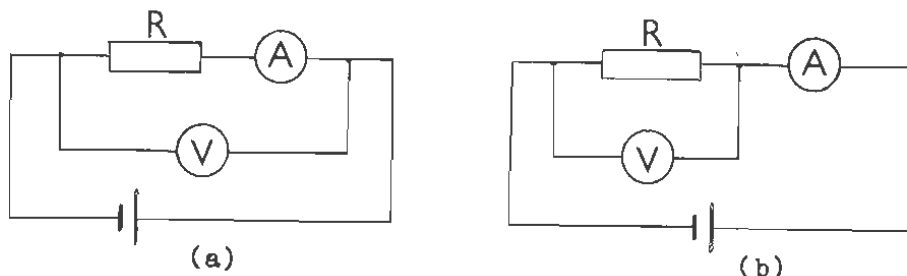
praktiku můžeme pro srovnání využít údajů z učebnic, tabulek apod.

Proměnné systematické chyby je možné snáze rozpoznat právě proto, že v jejich změně lze vysledovat nějakou zákonitost. Je možné na ně usuzovat např. ze systematicky se měnících odchylek naměřených hodnot od střední hodnoty. Pro snazší posouzení průběhu odchylek je vhodné je zaznamenat do grafu.

Systematické chyby z různých zdrojů, konstantní i proměnné, jsou aditivní; celková systematická chyba je dána jejich součtem.

Příklad 4. Systematická chyba metody při měření elektrického odporu na základě Ohmova zákona a její korekce.

Odpor R rezistoru můžeme měřit nepřímou metodou (viz kap. 3) tak, že změříme napětí U na rezistoru a proud I , který jím prochází. Z nich pak odpor vypočítáme pomocí Ohmova zákona, $R = \frac{U}{I}$. Zapojení měřicích přístrojů je možné uspořádat podle obr. 4(a) nebo 4(b).



Obr. 4. Schéma zapojení pro měření elektrického odporu nepřímou metodou

V zapojení podle obr. 4(a) měříme proud I procházející rezistorem, avšak místo napětí U na rezistoru měříme napětí U' , které je součtem napětí U na rezistoru a napětí U_A na ampérmetru:

$$U' = U + U_A \quad (4)$$

Vypočítáme-li pak odpor z Ohmova zákona dosazením naměřených hodnot, dostaneme výsledek R' ;

$$R' = \frac{U'}{I} \quad (5)$$

který je zatížen systematickou chybou. Je to důsledek toho, že se do něho promítla systematická chyba U_A naměřené hodnoty napětí U' .

Systematickou chybu zatěžující vypočtenou hodnotu odporu, která vyplývá z použité metody měření, je možné korigovat výpočtem. Pro korigovaný odpor R rezistoru platí

$$R = \frac{U}{I} \quad (6)$$

po dosazení za U ze vztahu (4) je

$$R = \frac{U' - U_A}{I} = \frac{U'}{I} - \frac{U_A}{I},$$

tj.

$$R = \frac{U'}{I} - R_A, \quad (7)$$

kde korekční člen $R_A = \frac{U_A}{I}$ je vnitřní odpor ampérmetru. Ze vztahu (7) je vidět, že korekci není potřeba při zapojení podle obr. 4(a) provádět, je-li $R \gg R_A$.

Podobně i zapojení podle obr. 4(b) je zdrojem systematické chyby. V něm měříme přímo napětí U na rezistoru; systematická chyba se však objevuje v naměřené hodnotě proudu I' , který je roven součtu proudu I ve větvi s rezistorem a proudu I_V ve větvi s voltmetrem:

$$I' = I + I_V. \quad (8)$$

Odpor R' vypočtený z naměřených hodnot U a I' je tedy opět zatížen systematickou chybou.

Korekci můžeme provést podobným způsobem jako v předchozím případě. Po dosazení do vztahu (6) za I podle vztahu (8) dostaneme

$$R = \frac{U}{I' - I_V} = \left(\frac{I'}{U} - \frac{I_V}{U} \right)^{-1},$$

tj. pro korigovaný odpor

$$R = \left(\frac{I'}{U} - \frac{1}{R_V} \right)^{-1} \quad (9)$$

kde $R_V = \frac{U}{I_V}$ je vnitřní odpor voltmetru. V případě tohoto zapojení není potřeba korekci provádět, je-li $R_V \gg R$.

Systematická chyba nekorigovaného odporu R' byla v případě zapojení podle obr. 4(a)

$$R = R' - R = R_A,$$

v případě zapojení podle obr. 4(b)

$$\left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R_V}.$$

Je potřeba připomenout, že při tomto měření může být výsledek zatížen dalšími systematickými chybami z různých zdrojů - způsobených např. nesprávným odečítáním na stupnici přístrojů, nedokonalostí stupnice či měrného systému přístrojů apod. Tyto systematické chyby se samozřejmě uvedenou korekcí neodstraní; je třeba se je pokusit zjistit a odstranit nějakým jiným způsobem.

4.4 Náhodné chyby přímých měření

V tomto odstavci se budeme zabývat výsledky přímých měření (viz kap.3), o nichž budeme předpokládat, že jsou zatíženy jen náhodnými chybami.

Takové výsledky jsou hodnotami náhodné veličiny.

Náhodnou veličinu lze charakterizovat pravděpodobností, s jakou nabývá svých hodnot. Náhodná veličina může být spojitá nebo nespojitá. Nespojitá náhodná veličina může nabývat jen konečně nebo spočetně mnoha hodnot. Jsou to často hodnoty celočíselné, např. popisuje-li tato veličina počet nějakých objektů či jevů (částic, impulsů apod.). Předem zadané celočíselné hodnoty w nabývá s pravděpodobností $P(w)$.

Naproti tomu spojitá náhodná veličina může nabývat hodnot, které se od sebe libovolně málo liší. Charakterizujeme ji pravděpodobností $P(w_1, w_2)$, s níž hodnota této náhodné veličiny padne do daného intervalu $\langle w_1, w_2 \rangle$. Dále se budeme zabývat jen spojitými náhodnými veličinami.

Budeme nyní hledat tzv. zákon rozdělení spojité náhodné veličiny, jejíž hodnoty dostáváme jako výsledky přímých měření. Tento zákon nám umožní dostat na základě souboru naměřených hodnot nějaké fyzikální veličiny informaci o její skutečné hodnotě. Nebude to přímo tato skutečná hodnota; jak už jsme se zmínili, není možné ji bezprostředně zjistit. Určíme však, v jakém intervalu a s jakou pravděpodobností skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny leží.

4.4.1 Rozdělení četností v souboru naměřených hodnot. Od histogramu k normálnímu rozdělení

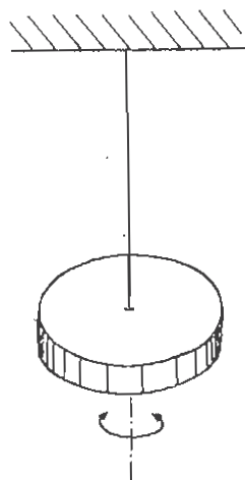
Pokusíme se nejdříve na konkrétním příkladu vyšetřit vlastnosti souboru naměřených hodnot. Soubor bude velmi rozsáhlý; později, až budeme znát způsoby zjištění střední hodnoty a náhodné chyby, nám bude pro jejich určení stačit podstatně menší počet měření.

Příklad 5. Měření doby kmitu torzního kyvadla.

Torzní kyvadlo (obr.5) se skládá ze svislého závěsu nahoře upevněného, k němuž je dole uchyceno těleso. Toto těleso kmitá kolem své rovnovážné polohy tak, že se otáčí kolem osy procházející svisle středem závěsu (závěs se přitom torzně deformuje). V našem případě je závěs tvořen drátem a těleso má tvar válce.

Změřili jsme 100-krát dobu kmitu T tohoto kyvadla. Naměřené hodnoty T_i jsou uvedeny v tabulce 6 (i je pořadové číslo měření, $i = 1, \dots, 100$).³⁾

³⁾ Měření bylo provedeno stopkami - a to tak, že byla změřena vždy doba deseti kmitů, $10 \cdot T_i$, aby se zmenšily chyby pozorování vznikající při zapnutí a vypnutí stopek na počátku a na konci měření. V tabulce jsou už uvedeny vypočtené hodnoty T_i .



Obr. 5. Torzní kyvadlo

Tabulka 6. Naměřené hodnoty doby kmitu torzního kyvadla

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{T}{s}$	2,12	2,02	2,42	2,14	1,92	2,22	2,16	1,88	2,44	2,12	2,14	2,32	1,92	2,52
1	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$\frac{T}{s}$	2,18	2,38	2,10	2,22	2,28	2,04	2,26	2,08	2,30	3,32	1,98	2,12	2,26	2,40
1	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$\frac{T}{s}$	2,38	2,12	2,06	2,22	2,32	2,00	2,14	2,32	1,92	2,22	2,08	2,40	2,04	2,32
1	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
$\frac{T}{s}$	1,94	2,30	2,10	2,28	2,02	2,20	2,44	2,24	2,06	2,36	2,20	1,86	2,08	2,18
1	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
$\frac{T}{s}$	1,94	2,20	2,30	2,18	2,18	2,12	2,06	2,24	2,30	1,98	2,24	2,32	2,02	2,34
1	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
$\frac{T}{s}$	2,14	2,32	2,00	1,98	2,18	2,26	2,26	2,06	2,36	2,28	1,92	2,14	2,14	2,28
1	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
$\frac{T}{s}$	2,46	2,18	2,06	2,28	1,98	2,26	2,08	2,08	1,96	2,18	2,18	2,48	2,20	1,98
1	99	100												
$\frac{T}{s}$	2,14	2,02												

Soubor hodnot v tabulce 6 je nepřehledný. Uspořádáme ho proto do několika skupin. Všechny naměřené hodnoty leží v intervalu $I = (1,8; 2,6)$ s. Rozdělíme interval I na několik částí - zvolíme např. délku jedné části $\Delta I = 0,1$ s:

$$I = (1,8; 1,9) \cup (1,9; 2,0) \cup (2,0; 2,1) \cup (2,1; 2,2) \cup (2,2; 2,3) \cup (2,3; 2,4) \cup (2,4; 2,5) \cup (2,5; 2,6).$$

Vypočítáme nyní absolutní a relativní četnosti naměřených hodnot spadajících do těchto dílčích intervalů a uspořádáme je do tabulky (tab. 7).

Tabulka 7. Rozdělení absolutních a relativních četností

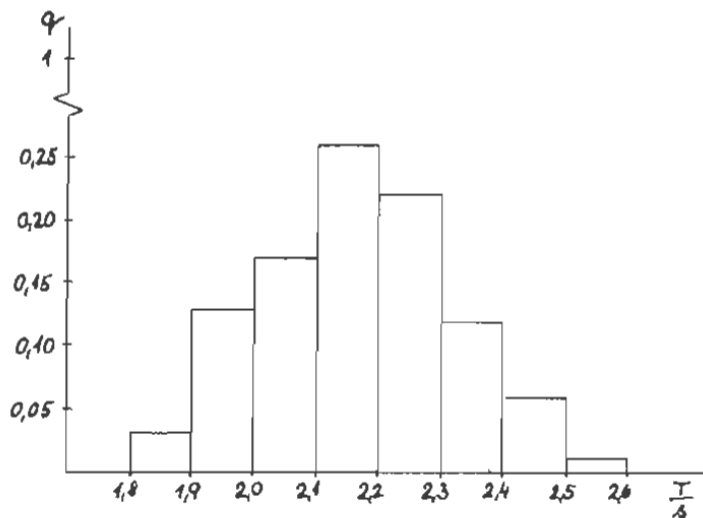
Dílčí interval $\frac{\Delta T}{s}$	(1,8; 1,9)	(1,9; 2,0)	(2,0; 2,1)	(2,1; 2,2)	(2,2; 2,3)
Q	3	13	17	26	22
q	0,03	0,13	0,17	0,26	0,22
Dílčí interval $\frac{\Delta T}{s}$	(2,3; 2,4)	(2,4; 2,5)	(2,5; 2,6)	/	
Q	12	6	1		
q	0,12	0,06	0,01		

Absolutní četnost Q je počet naměřených hodnot T_1 spadajících do daného dílčího časového intervalu. Relativní četnost q je dána podílem absolutní četnosti Q k celkovému počtu měření N: ⁴⁾

$$q = \frac{Q}{N} .$$

Rozložení relativních četností zobrazíme graficky pomocí tzv. histogramu relativních četností. Velikost relativní četnosti v něm znázorníme obdélníkem odpovídající výšky nad daným dílčím intervalem ΔT (obr. 6).

⁴⁾ Absolutní i relativní četnosti jsou tedy prostá čísla, mají rozměr 1. Součet absolutních četností pro všechny dílčí intervaly musí být roven celkovému počtu měření N. Součet relativních četností je roven 1.



Obr. 6. Histogram relativních četností

Histogram na obr. 6 má tvar často se objevující u souborů naměřených hodnot libovolné spojité náhodné veličiny w . Dosahuje největší výšky zhruba uprostřed intervalu naměřených hodnot a k jeho okrajům se splošťuje. Představme si, že bychom zvětšovali počet naměřených hodnot a zmenšovali délku dílčího intervalu Δw . Horní zubatý okraj histogramu by se tím vyhlazoval, až by v limitním případě přešel v hladkou křivku $p(w)$,

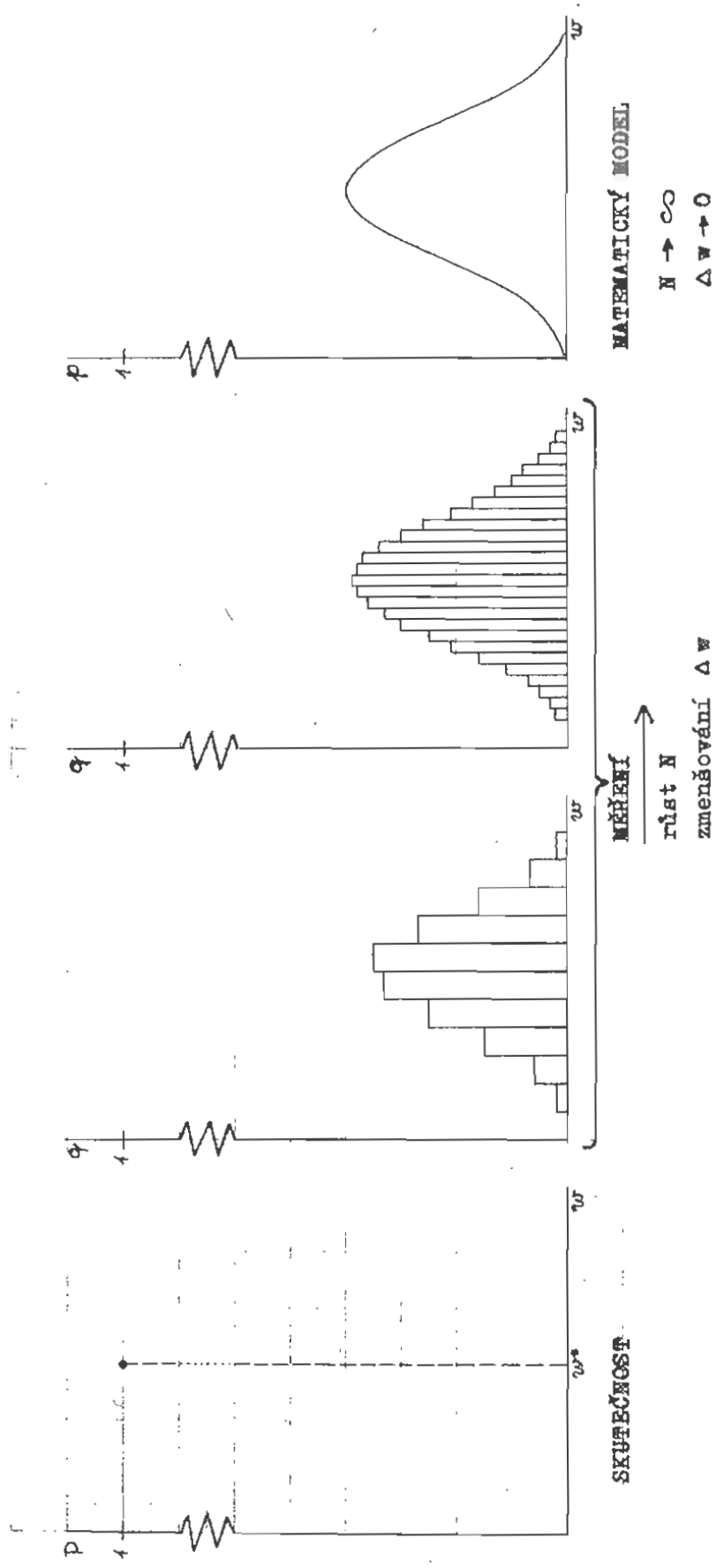
$$p(w) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{q(w; w + \Delta w)}{\Delta w} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta w \rightarrow 0}} \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta Q(w; w + \Delta w)}{\Delta w}. \quad (10)$$

Tento myšlenkový postup je znázorněn na obr. 7. Jeho levá strana vyjadřuje náš předpoklad o existenci jediné skutečné hodnoty měřené veličiny, w^* . Pravděpodobnost výskytu této skutečné hodnoty je tedy $P(w^*) = 1$. Dva střední obrázky představují histogramy relativních četností naměřených hodnot veličiny w , naznačující zvětšování počtu měření N a zmenšování dílčího intervalu Δw . Pravá část obr. 7 je grafem funkce (10).

Funkce $p(w)$ má význam hustoty pravděpodobnosti . Jak dále uvidíme, je s její pomocí možné určit pravděpodobnost, s jakou bude hodnota veličiny w ležet ve zvoleném intervalu. K tomu však budeme potřebovat analytické vyjádření funkce $p(w)$.

Budeme nyní předpokládat, že

- můžeme získat neomezeně mnoho naměřených hodnot veličiny w ;
- tyto naměřené hodnoty jsou hodnotami spojité náhodné veličiny;



Obr. 7 Přejchod od histogramu relativních četností k hustotě pravděpodobnosti

- každou náhodnou chybu je možné vyjádřit jako součet velkého počtu velmi malých chyb pocházejících z nezávislých zdrojů, které jsou co do absolutní hodnoty stejně velké;
- každá taková elementární chyba se při měření objevuje se stejnou pravděpodobností se znaménkem "+" nebo "-".

Funkce $p(w)$ je pak dána vztahem

$$p(w) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(w - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (11)$$

a nazývá se Gaussovo neboli normální rozdělení. Jejím grafem je Gaussova neboli normální křivka (obr. 7 poslední graf vpravo).

Hustota pravděpodobnosti má tvar daný vztahem (11) vždy, jsou-li splněny uvedené předpoklady. Přímá fyzikální měření většinou těmto předpokladům dosti dobře vyhovují. Proto je možné zpravidla vždy pro vyhodnocení výsledků fyzikálního měření v praxi použít normálního rozdělení.⁵⁾

4.4.2 Vlastnosti normálního rozdělení

Ze vztahu (11) je vidět, že funkce $p(w)$ je definována pro všechna reálná $w \in (-\infty, \infty)$. Její konkrétní průběh závisí na hodnotách konstant μ a σ , které nazýváme parametry normálního rozdělení.

Parametr μ je tzv. střední hodnota a parametr σ směrodatná odchylka. Druhá mocnina směrodatné odchylky, σ^2 , se nazývá rozptyl.⁶⁾

Pomocí hustoty pravděpodobnosti $p(w)$ je možné určit pravděpodobnost, s jakou hodnota veličiny w padne do určitého intervalu $(w', w'') \subset (-\infty, \infty)$:

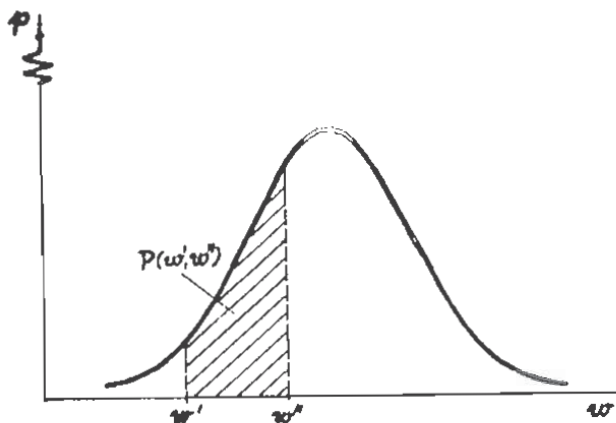
$$P(w', w'') = \int_{w'}^{w''} p(w) \, dw \quad (12)$$

V grafu na obr. 8 je pravděpodobnost $P(w', w'')$ znázorněna obsahem plochy pod normální křivkou v daném intervalu. Je vidět, že tato pravděpodobnost záleží nejen na šířce intervalu (w', w'') , ale i na jeho poloze. Pro $(w', w'') = (-\infty, \infty)$ je

$$P(-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(w) \, dw = 1 \quad (13)$$

⁵⁾ Nebudeme tedy u každého souboru naměřených hodnot zjišťovat, zda je možné vyjít při jeho zpracování z normálního rozdělení. Při přesných měřeních je ovšem třeba vždy nejdříve vyšetřit, jakým rozdělením pravděpodobnosti lze danou náhodnou veličinu popsat.

⁶⁾ V literatuře se často setkáme také s názvem střední kvadratická chyba pro parametr σ a s názvem variance pro σ^2 .



Obr. 8. Graf hustoty pravděpodobnosti a pravděpodobnost, s jakou hodnota w padne do intervalu (w', w'')

Všimněme si, že je to v souladu s tím, jak jsme se od histogramu relativních četností dostali k normální křivce (obr. 7). V histogramu byl součet relativních četností, a tedy součet délek obdélníků, roven 1; při limitním přechodu $\Delta w \rightarrow 0$ jako by se šířka obdélníků zmenšila tak, že "délky obdélníků" zaplnily celou plochu pod frekvenční křivkou. Obsah této plochy vyjádřený analyticky vztahem (13) má také velikost 1.

Vrátíme se nyní k analytickému vyjádření normálního rozdělení (11) a budeme studovat jeho vlastnosti.

- (a) Vyšetříme, v jakém bodě dosahuje funkce $p(w)$ maxima.
- (b) Ukážeme, že normální křivka je symetrická kolem svislé osy procházející jejím vrcholem.
- (c) Zjistíme, jaký význam má parametr σ .
- (d) Vyšetříme, jaká je pravděpodobnost P pro některé intervaly symetricky rozložené kolem bodu $w = \mu$.

(a) Poloha maxima normálního rozdělení

Hledáme lokální extrémů funkce (11), tj. vypočítáme nejprve prvou derivaci funkce $p(w)$ a položíme ji rovnou nule:

$$\frac{d p(w)}{d w} = \frac{d}{d w} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(w - \mu)^2}{2 \sigma^2}} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(w - \mu)^2}{2 \sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sigma^2} \cdot 2 (w - \mu) \right) = 0 \quad (14)$$

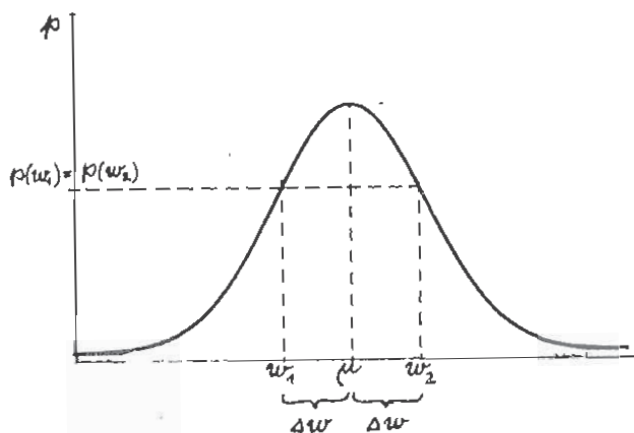
Z celého tohoto výrazu může nabývat nuly pouze rozdíl $(w - \mu)$; řešením rovnice (14) je proto jediný bod

$$w = \mu. \quad (15)$$

Druhou derivaci funkce $p(w)$ v tomto bodě už nemusíme počítat; z grafu je totiž vidět, že tato funkce má jediný lokální extrém, maximum - a nabývá ho tedy v bodě $w = \mu$. Parametr μ tedy vyznačuje polohu maxima normálního rozdělení.

(b) Symetrie normální křivky

Porovnáme hodnoty, jakých nabývá funkce $p(w)$ v bodech w_1, w_2 symetricky rozložených kolem bodu μ . Podle obr. 9 můžeme body w_1 a w_2 vyjádřit pomocí μ a jejich vzdáleností Δw od μ : $w_1 = \mu - \Delta w$, $w_2 = \mu + \Delta w$.



Obr. 9. Symetrie normální křivky

Pak platí:

$$p(w_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(w_1 - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\mu - \Delta w - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p(w_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-\Delta w)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta w)^2}{2\sigma^2}} \quad (16)$$

Pravá strana vztahu (16) je stejná, jako bychom dostali při výpočtu $p(w_2)$. Je vidět, že $p(w_1) = p(w_2)$ pro libovolné dva body w_1, w_2 symetricky rozložené kolem bodu μ .

Normální křivka je tedy symetrická kolem svislé osy procházející bodem μ , tj. i jejím vrcholem.

Ze symetrie normální křivky plyne pro pravděpodobnost P , že

$$P(\mu - \Delta w; \mu) = P(\mu; \mu + \Delta w), \quad (17)$$

a také, ještě na základě vztahu (13), že

$$P(-\infty; \mu) = P(\mu; \infty) = 0,5. \quad (18)$$

(c) Význam parametru σ

Plocha pod normální křivkou má vždy obsah rovný 1. Čím širší tato křivka proto je, tím musí být nižší (plošší), a obráceně. Ukážeme nyní, jakým způsobem popisuje šířku normální křivky směrodatná odchylka.

Šířku normální křivky d můžeme měřit např. mezi body, v nichž tato křivka dosahuje poloviny své maximální výšky (obr. 10). Je tedy

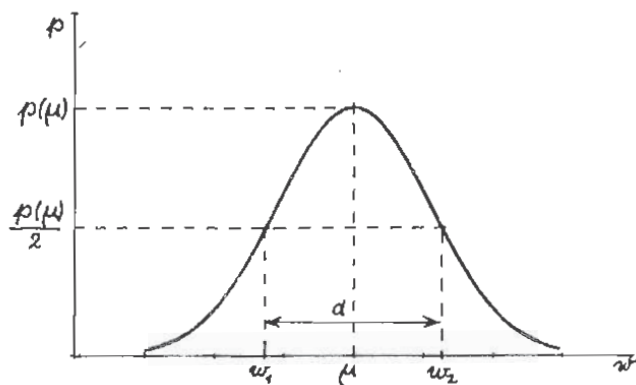
$$d = w_2 - w_1, \quad (19)$$

a dále

$$p(w_1) = p(w_2) = \frac{1}{2} p(\mu). \quad (20)$$

Maximální výšku normální křivky určíme ze vztahu (11) dosazením $w = \mu$:

$$p(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}; \quad (21)$$



Obr. 10. Šířka normální křivky

je vidět, že směrodatná odchylka tuto výšku jednoznačně určuje.

Zjistíme nyní hodnoty w_1, w_2 vyhovující rovnici (20); jsou to kořeny rovnice

$$p(w) = \frac{1}{2} p(\mu).$$

Po dosazení z (11) a (21) a úpravě má tato rovnice tvar

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}.$$

Obě strany logaritmuje a dále upravujeme:

$$-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2} = \ln \frac{1}{2}$$

$$(w-\mu)^2 = 2\sigma^2 \ln 2.$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny

$$(w-\mu)_{1,2} = \pm \sigma \sqrt{2 \ln 2},$$

z nichž vypočítáme hledané hodnoty w_1, w_2 :

$$w_1 = \mu - \sigma \sqrt{2 \ln 2} = \mu - 1,18 \sigma$$

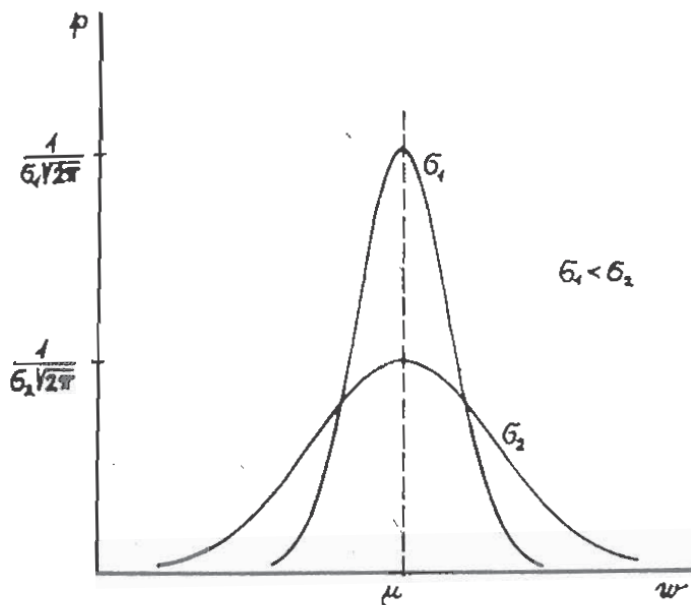
$$w_2 = \mu + \sigma \sqrt{2 \ln 2} = \mu + 1,18 \sigma.$$

Pro šířku normální křivky pak ze vztahu (19) dostaneme

$$d = w_2 - w_1 = 2,36 \sigma. \quad (22)$$

Z toho je vidět, že směrodatná odchylka σ jednoznačně určuje šířku křivky.

Čím je σ větší, tím je normální křivka plošší a širší. Je to vidět na obr. 11, kde jsou znázorněny dvě normální křivky se stejnou střední hodnotou, ale různými směrodatnými odchylkami σ_1, σ_2 .



Obr. 11. Normální křivky se stejnou střední hodnotou a různými směrodatnými odchylkami

(d) Intervaly spolehlivosti pro parametr μ .

Jak už bylo uvedeno na začátku tohoto odstavce, znázorňuje obsah plochy pod normální křivkou v určitém intervalu pravděpodobnost P , s jakou padne hodnota veličiny w do tohoto intervalu. Vyjadřuje to také vztah (12).

Při zpracování naměřených hodnot nás bude zajímat obrácená úloha, než jakou jsme formulovali v souvislosti se vztahem (12): nebudeme hledat velikost pravděpodobnosti pro daný interval, ale velikost intervalu pro zvolenou hodnotu pravděpodobnosti.

Budeme se přitom zabývat jen intervaly, které jsou symetrické kolem střední hodnoty μ ; je možné je vyjádřit pomocí parametrů normálního rozdělení tak, že v obr. 9 položíme $\Delta w = k\sigma$, kde k je kladné číslo. Tyto intervaly pak můžeme zapsat ve tvaru

$$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma).$$

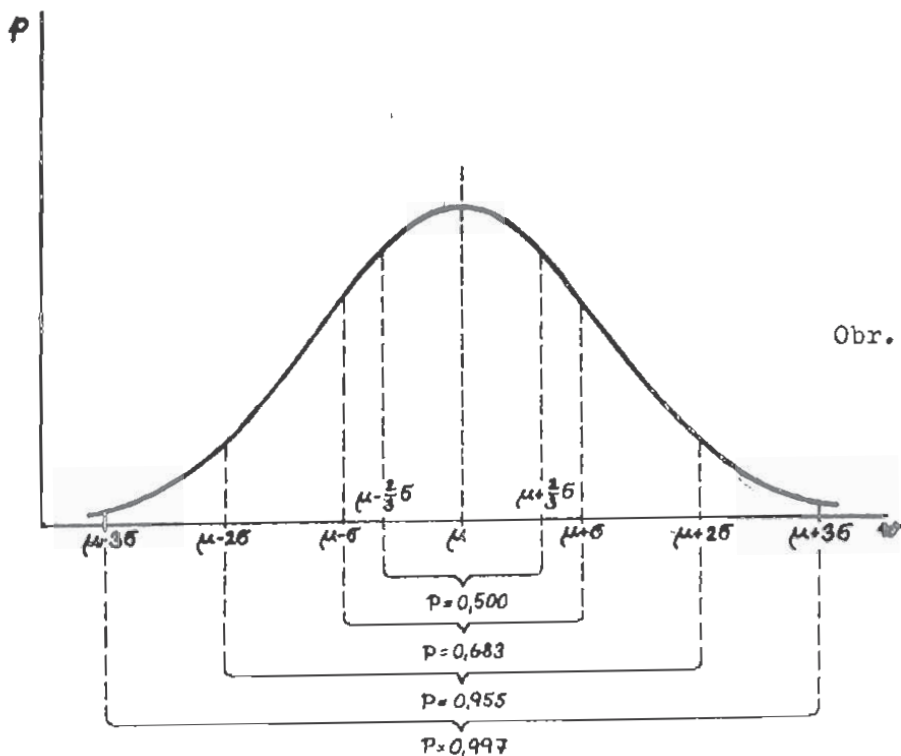
Pravděpodobnost P můžeme vyjádřit buď jako nezáporné číslo ≤ 1 (např. $P = 0,999$) nebo v procentovém tvaru (např. $P = 99,9\%$). O intervalu, jemuž přísluší pravděpodobnost P , budeme hovořit jako o P -procentním intervalu spolehlivosti pro parametr μ .⁷⁾

Pro zvolenou pravděpodobnost P je možné odpovídající intervaly spolehlivosti $(\mu - k\sigma; \mu + k\sigma)$ určit pomocí vztahu (12):

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}} dw. \quad (23)$$

Pro některé hodnoty pravděpodobnosti P jsou tyto intervaly zachyceny na obr. 12; v posledním řádku tabulky 9 jsou pro ještě další hodnoty pravděpodobnosti P uvedena čísla k , jimiž je možné odpovídající intervaly spolehli-

⁷⁾ Intervaly spolehlivosti se definují i pro parametr σ ; tím se však v tomto textu nebudeme zabývat.



Obr. 12. Intervaly spolehlivosti pro parametr μ

vosti vyjádřit.

Na obr. 12 si všimneme blíže dvou případů: v prvním z nich intervalu, který vyděluje právě polovinu obsahu plochy pod normální křivkou ($P = 0,5$), a ve druhém intervalu, v němž tento obsah leží prakticky celý ($P \approx 1$).

Pro $P = 0,5$ ($= 50\%$) je příslušný interval spolehlivosti ($\mu - 0,675\sigma$; $\mu + 0,675\sigma$). Výraz $0,675\sigma$ ($\approx \frac{2}{3}\sigma$) se nazývá pravděpodobná chyba. Může se s ní někdy setkat v literatuře pojednávající o fyzikálních měřeních. Pravděpodobnost, že náhodná veličina padne do intervalu ($\mu - 0,675\sigma$; $\mu + 0,675\sigma$) je stejně velká jako pravděpodobnost, že padne mimo něj.

Případ $P \approx 1$ ($\approx 100\%$) znamená, že náhodná veličina padne do odpovídajícího intervalu prakticky s jistotou. Např. (obr. 12) pro $P = 0,997$ je pravděpodobné, že tomu tak nebude jen ve 3 případech z 1000 - tj. 0,3%. Tomu odpovídá číslo $k = 3$. Z posledního řádku tabulky 9 vidíme, že pro ještě jistější případ - $P = 0,999$ ($= 99,9\%$) je $k = 3,26$. Výraz $k \cdot \sigma$ pro takové vysoké hodnoty pravděpodobnosti P , pro něž je rozdíl $(1 - P)$ zanedbatelný, nazýváme mezní chyba. Mezní chybu budeme přednostně používat při zpracování souborů naměřených hodnot. Obvykle budeme volit $P = 0,995$.

4.4.3 Vlastnosti spojité náhodné veličiny, která se řídí normálním rozdělením

V předchozím odstavci jsme se zabývali spojitou náhodnou veličinou, která se řídí normálním rozdělením. Nezapomínali jsme se přitom otázkou, jakým způsobem můžeme k hodnotám této veličiny dojít.

Budeme nyní studovat vlastnosti spojité náhodné veličiny w , jejíž hodnoty jsou získány měřením. Nejprve vyšetříme ideální případ, při němž budeme předpokládat, že máme těchto naměřených hodnot w_i nekonečný počet ($i = 1, 2, 3, \dots$). V dalším odstavci (4.4.4) pak přejdeme ke konečnému počtu naměřených hodnot ($i = 1, \dots, N$), který už bude odpovídat skutečnosti.

Pro spojitou náhodnou veličinu w řídicí se normálním rozdělením, u níž máme k dispozici nekonečně mnoho jejích hodnot w_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), lze dokázat následující tři tvrzení:

1. Střední hodnota náhodné veličiny je rovna její skutečné hodnotě:

$$\mu = w^{\bar{x}}. \quad (24)$$

2. Střední hodnota náhodné veličiny je dána výrazem

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^N w_i}{N}, \quad (25)$$

kde w_i jsou její náhodně vybrané hodnoty.

3. Rozptyl náhodné veličiny je dán vztahem

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w_i - \mu)^2. \quad (26)$$

Naznačíme si postup, jakým by bylo možné dospět k tvrzení 1. a 2. Označme ε_i náhodnou chybu i -té hodnoty w_i . Podle vztahu (2) je

$$w_i = w^{\bar{x}} + \varepsilon_i. \quad (27)$$

Má-li soubor všech w_i normální rozdělení, má je i soubor hodnot ε_i . Pravděpodobnost výskytu kladných a záporných náhodných chyb dané velikosti je stejně velká a střední hodnota náhodných chyb μ_ε je proto rovna nule:

$$\mu_\varepsilon = 0. \quad (28)$$

Protože $w^{\bar{x}}$ je konstanta, je střední hodnota μ rovna přímo $w^{\bar{x}}$. Odtud plyne, že

$$\mu = w^{\bar{x}},$$

tj. tvrzení 1.

Představme si N rovnic typu (27) zapsaných pro N náhodně vybraných hodnot w_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$, a sečtěme je.

Dostaneme:

$$\sum_{i=1}^N w_i = N w^{\bar{x}} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i. \quad (29)$$

Definujme aritmetický průměr \bar{w} uvedených N hodnot w_1 vztahem

$$\bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \quad (30)$$

Z rovnice (29) pak můžeme odvodit, že

$$\bar{w} = w^{\bar{x}} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i \quad (31)$$

Poroste-li hodnota N , lze očekávat, že výraz $\sum_{i=1}^N \epsilon_i$ nebude systematicky růst; jeho hodnota sice může někdy růst, někdy klesat, celkový trend však bude klesající, neboť čím větší bude N , tím spíše v uvedeném součtu najdeme ke každé kladné chybě určité velikosti stejně velkou chybu zápornou. Druhý člen na pravé straně rovnice (31) bude tedy s rostoucím N klesat tak, že bude platit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i = 0, \quad (32)$$

a tedy

$$w^{\bar{x}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{w} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \quad (33)$$

Spojením rovnic (24) a (33) dostaneme vztah (25) druhého tvrzení.

Tvrzení 3. ponecháme bez důkazu, protože jeho postup je náročný.

4.4.4 Odhady střední hodnoty a směrodatné odchylky pro konečný počet měření

Kdybychom mohli měřením získat nekonečný počet hodnot w_1 spojité náhodné veličiny řídící se normálním rozdělením, uměli bychom pomocí vztahu (25) a (26) určit parametry μ a σ . Nebylo by to ostatně ani potřeba, protože bychom mohli přímo vypočítat skutečnou hodnotu $w^{\bar{x}}$ pomocí vztahu (33).

V každém reálném experimentu je však počet měření, která můžeme provést, konečný. Naměřené hodnoty tak tvoří jistý výběr z neomezeného, tzv. základního souboru možných hodnot měřené veličiny. Máme-li k dispozici pouze konečný výběr hodnot w_i , $i = 1, \dots, N$, nemůžeme použít vztahů pro μ, σ a $w^{\bar{x}}$ z předchozího odstavce 4.4.3. Můžeme je určit jen přibližně, odhadnout.

Podle vztahů (24), (30) a (33) platí

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{w}$$

a

$$\bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i}{N}$$

Protože limitní přechod $N \rightarrow \infty$ nelze pro konečný výběr ze základního souboru uskutečnit, vezmeme za odhad střední hodnoty μ aritmetický průměr \bar{w} , tj.

$$\mu \approx \bar{w} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i}{N} \quad (34)$$

Odhad parametru σ nemůžeme takto jednoduše provést - jak se ukáže, vyšetříme-li vlastnosti chyb naměřených hodnot. Místo absolutní chyby i -tého měření podle (2),

$$\epsilon_i = w_i - w^{\#},$$

kterou neumíme určit, protože neznáme skutečnou hodnotu $w^{\#}$, určíme odchylku i -tého měření od aritmetického průměru:

$$\Delta w_i = w_i - \bar{w}. \quad (35)$$

Chyba ϵ_i se nazývá skutečná chyba, protože je to odchylka naměřené hodnoty w_i od skutečné hodnoty $w^{\#}$. Naproti tomu odchylka Δw_i naměřené hodnoty w_i od aritmetického průměru \bar{w} je tzv. zdánlivá chyba.

Pro hodnoty zdánlivých chyb platí následující tvrzení:

a) Součet všech zdánlivých chyb je vždy roven nule. Snadno se o tom můžeme přesvědčit, vyjdeme-li z rovnice (35); uvedené tvrzení lze využít ke kontrole správnosti výpočtu zdánlivých chyb.

b) Součet druhých mocnin zdánlivých chyb má menší hodnotu než součet ^{mocnin} druhých odchylek naměřených hodnot od jiné hodnoty, než je aritmetický průměr. Toto tvrzení můžeme zapsat vztahem

$$(M-w_1)^2 + (M-w_2)^2 + \dots + (M-w_N)^2 > (\bar{w}-w_1)^2 + (\bar{w}-w_2)^2 + \dots + (\bar{w}-w_N)^2,$$

kde M je libovolné číslo, $M \neq \bar{w}$. Speciálně pro $M = \mu$ odtud vyplývá rovnice

$$\sum_{i=1}^N (\mu - w_i)^2 > \sum_{i=1}^N (\bar{w} - w_i)^2. \quad (36)$$

Kdybychom tedy chtěli rozptyl σ^2 odhadnout tak, že bychom vynechali limitní přechod a střední hodnotu μ nahradili aritmetickým průměrem \bar{w} , klesl by podle vztahu (36) součet druhých mocnin. Dá se však ukázat, že toto zmenšení lze vhodně kompenzovat, budeme-li při odhadu rozptylu zmenšovat N o jednotku:

$$\sigma^2 \doteq s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}{N - 1}; \quad (37)$$

pro směrodatnou odchylku σ tedy dostaneme odhad, který se nazývá směrodatná odchylka jednoho měření (z řady měření) a značí se s :

$$\sigma \doteq s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}{N - 1}}. \quad (38)$$

Pro velmi velké soubory naměřených hodnot je $N - 1 \doteq N$; pak je možné určit směrodatnou odchylku s ze stejného vztahu jako σ . Např. pro $N > 100$ je rozdíl, který tím vznikne, menší než 1 %. Zvlášť bude na druhé straně třeba vyšetřit případ, kdy je soubor naměřených hodnot malý.

Než k němu přejdeme, bude užitečné si uvědomit, jaký význam mají odhady \bar{w} a s . Při dostatečném počtu měření je interval, do něhož padne měřená hodnota s pravděpodobností P , roven $(\bar{w} - k \cdot s, \bar{w} + k \cdot s)$, kde k je stejné číslo pro danou hodnotu pravděpodobnosti jako v ideálním případě nekonečného počtu měření (srov. odst. 4.4.2, bod (d) a poslední řádek tabulky 9).

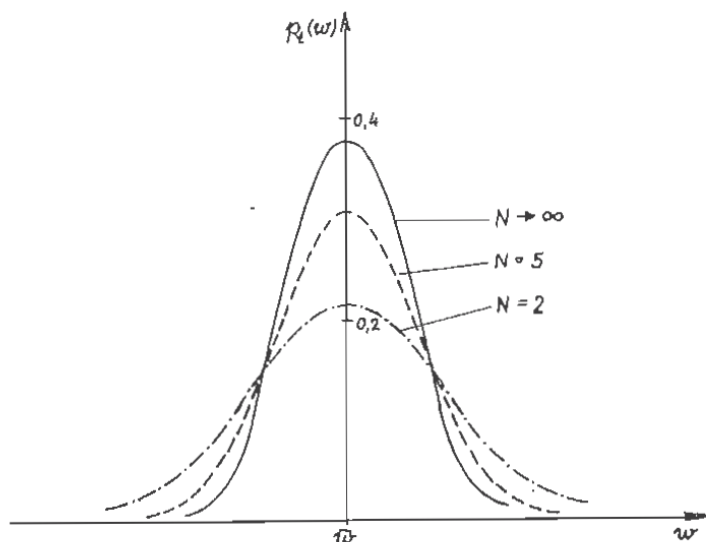
Výraz $k \cdot s$ nazýváme mezní chyba, je-li odpovídající hodnota pravděpodobnosti P blízká 1 - stejně jako tomu bylo u normálního rozdělení. Analogicky můžeme pro $P = 0,5$ hovořit o pravděpodobné chybě (viz odst. 4.4.2).

4.4.5 Směrodatná odchylka při malém počtu měření

V předchozím odstavci jsme při charakteristice platnosti vztahu (38) použili výrazy "velmi velký" a "dostatečně velký" počet měření. Kde mezi nimi leží hranice a jaký počet měření je už třeba brát za "malý"? Záleží to na přesnosti, s jakou chceme získat výsledek. Obvykle je možné za dostatečný považovat počet měření mezi 10 a 20; $N \geq 20$ už je velmi mnoho (prakticky nekonečně mnoho), $N \leq 10$ je málo.⁸⁾

Pro malý počet měření můžeme sice vypočítat střední hodnotu \bar{w} a směrodatnou odchylku jednoho měření s pomocí vztahů (34) a (38), ale nemůžeme je interpretovat stejně jako při dostatečně velkém N . Vyplývá to z toho, že při malém počtu měření se spojitá náhodná veličina neřídí normálním rozdělením.

Při malém počtu měření budeme předpokládat, že se spojitá náhodná veličina w řídí tzv. Studentovým neboli t-rozdělením. Graf hustoty pravděpodobnosti $p_t(w)$ tohoto rozdělení je na obr. 14 - pro dva případy počtu měření ($N = 2$ a $N = 5$) se stejnou střední hodnotou a stejnou směrodatnou odchylkou. V limitě pro $N \rightarrow \infty$ přechází tento graf na normální křivku se stejnými parametry, která je v obr. 14 také zakreslena.



Obr. 14. Studentovo rozdělení

⁸⁾ V základním fyzikálním praktiku obvykle vystačíme s počtem měření bližším dolní hranici - např. s $N = 12$. Záleží to však na přesnosti, jakou v daných konkrétních podmínkách můžeme dosáhnout. Stanovení počtu měření provádíme před měřením; je to součást přípravy na měření a plánování přesnosti měření (viz odst. 6.1 a 6.2).

Graf hustoty pravděpodobnosti Studentova rozdělení má, podobně jako normální křivka, zvonovitý tvar. Je také symetrický vůči aritmetickému průměru \bar{w} . Ve srovnání s normální křivkou je však plošší - a to tím více, čím menší je N . Z toho je vidět, že pro dosažení stejné pravděpodobnosti P výskytu naměřené hodnoty v nějakém intervalu symetrickém kolem \bar{w} je třeba v případě t -rozdělení zvolit tento interval širší než tomu bylo u normálního rozdělení.

Jinými slovy, pro danou pravděpodobnost P je potřeba odpovídající číslo k brát tím větší, čím nižší je počet měření N . Hodnoty čísla k pro Studentovo rozdělení jsou uvedeny v tabulce 9.

Tabulka 9. Hodnoty čísla k pro pravděpodobnost P při různém počtu měření N

Pravděpo- dobnost P Počet měření N	0,5	0,7	0,95	0,995	0,999
2	1,00	1,96	12,71	127,32	636,62
3	0,82	1,39	4,30	14,09	31,60
4	0,77	1,25	3,18	7,45	12,94
5	0,74	1,19	2,78	5,60	8,61
6	0,73	1,16	2,57	4,77	6,86
7	0,72	1,13	2,45	4,32	5,96
8	0,71	1,12	2,37	4,03	5,41
9	0,71	1,11	2,31	3,83	5,04
10	0,70	1,10	2,26	3,69	4,78
" ∞ " normál.rozdělení	0,67	1,04	1,96	2,807	3,29

4.4.6 Kritéria pro vyloučení hrubých chyb měření

Z vlastností normálního rozdělení je vidět, že se v něm berou v úvahu libovolně velké chyby (vyplývá to už z předpokladu o existenci velmi velkého počtu nezávislých zdrojů náhodných chyb, viz odst. 4.4.1). Velké chyby jsou však málo pravděpodobné. Např. při neomezeném počtu měření bychom jen ve třech případech z tisíce naměřili hodnotu, která se od střední hodnoty μ liší o více než 3σ , tj. která je zatížena chybou $\epsilon \geq \pm 3\sigma$; jen v jednom případě bychom naměřili hodnotu zatíženou chybou $\epsilon \geq 3,29\sigma$, apod. Jinými slovy, chyby větší než mezní je možné očekávat jen ve velmi málo případech.

Podobnou úvahu můžeme uplatnit i na skutečná měření. Střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ jsme nahradili jejich odhady \bar{w} a s . Analogicky jako v ideálním případě je i nyní např. pravděpodobné, že jen v jednom případě z tisíce bychom naměřili hodnotu $w_i \notin (\bar{w} - 3,29 s; \bar{w} + 3,29 s)$. Zpravidla však je počet měření mnohem menší a počet případů chyb větších, než jsou chyby mezní, které můžeme v souborech naměřených hodnot očekávat, je zanedbatelný.

Pokud tedy takovou hodnotu $w_i \notin (\bar{w} - k \cdot s; \bar{w} + k \cdot s)$, kde k odpovídá pro daný počet měření vysoké pravděpodobnosti $P \approx 1$, v souboru naměřených hodnot najdeme, považujeme ji obvykle za hrubě chybnou a z dalšího zpracování ji vyloučíme. Volíme zpravidla $P = 0,997$ nebo $P = 0,999$. Toto kritérium budeme stručně nazývat "3s-kritérium" - i když pro malý počet měření je koeficient k u s odlišný od 3.

Pro vyloučení hrubých chyb můžeme použít ještě jiná kritéria. (V některých případech, např. při některých technických měřeních, jsou dokonce normativně stanovena.) Postupujeme např. tak, že pro měřenou hodnotu w_i , o níž se domníváme, že je zatížena hrubou chybou, vypočteme hodnotu výrazu

$$t = \frac{|w_i - \bar{w}|}{s} \quad (39)$$

a porovnáme ji s hodnotou t_a uvedenou v tabulce 10. Je-li $t > t_a$, považujeme hodnotu w_i za hrubě chybnou.

Tabulka 10. Kritické hodnoty pro vyloučení hrubých chyb

Počet měření	t_a	Počet měření	t_a
3	1,412	14	2,493
4	1,689	15	2,523
5	1,869	16	2,551
6	1,996	17	2,577
7	2,093	18	2,600
8	2,172	19	2,623
9	2,237	20	2,644
10	2,294	21	2,664
11	2,343	22	2,683
12	2,387	23	2,701
13	2,426	24	2,717

Ze vztahu (39) a tabulky 10 je vidět, že druhé kritérium pro vyloučení hrubých chyb je přísnější, a to zvláště pro soubory s malým počtem naměřených hodnot. Pro ně se interval, v němž mají ležet naměřené hodnoty, zužuje a hodnota pravděpodobnosti P se snižuje.

Vyloučíme-li ze souboru ty naměřené hodnoty, které považujeme za hrubě chybné, musíme samozřejmě znovu vypočítat aritmetický průměr \bar{w} a směrodatnou odchylku s .

Pravděpodobnost, že naměřená hodnota vyloučená na základě nějakého zvoleného kritéria je hrubě chybná, je sice velmi vysoká, ale není rovna jistotě. Může se stát, že se do této hodnoty promítly vlivy, které jsou pro měřený objekt podstatné - a naměřená hodnota tak o nich nese informaci. V tom případě nejsme oprávněni ji z dalšího zpracování vyloučit. Proto je potřeba postupovat při vylučování hrubých chyb uvážlivě a každou jednotlivou naměřenou hodnotu, na kterou nám ukáže některé z kritérií, posoudit ještě podle okolností, za nichž byla naměřena.

4.4.7 Směrodatná odchylka aritmetického průměru

Směrodatná odchylka s , kterou určujeme pro soubor naměřených hodnot podle vztahu (38), charakterizuje reprodukovatelnost jednoho měření z tohoto souboru; udává šířku intervalu, do něhož s nějakou zvolenou pravděpodobností padne naměřená hodnota.

Taková charakteristika však není pro celý soubor N měření dostačující; nedává ještě informaci o skutečné hodnotě w^* .

Aritmetický průměr \bar{w} je podle vztahu (34) odhadem střední hodnoty μ , a tedy podle (24) i skutečné hodnoty w^* . Protože byl vypočten z hodnot, z nichž každá je zatížena nějakou chybou, lze očekávat, že bude také zatížen chybou. Jinými slovy, lze očekávat, že kdybychom za stálých podmínek znovu provedli N měření, dospěli bychom k jiné hodnotě aritmetického průměru než u prvního souboru (a to přesto, že skutečná hodnota w^* , resp. střední hodnota μ , by podle předpokladu zůstala nezměněná). Jaká je tedy reprodukovatelnost určení \bar{w} ?⁹⁾ Matematická statistika ukazuje, že analogicky, jako lze reprodukovatelnost jednoho měření charakterizovat veličinou s , lze reprodukovatelnost střední hodnoty charakterizovat směrodatnou odchylkou aritmetického průměru z N měření $s_{\bar{w}}$ a že platí

$$s_{\bar{w}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}{N(N-1)}}. \quad (40)$$

⁹⁾ Je možné rozlišovat mezi opakovatelností a reprodukovatelností měření. Opakovatelnost měření je míra proměnlivosti, vyjadřující těsnost shody mezi po sobě jdoucími výsledky měření téže veličiny, zjištěnými toutéž měřicí metodou, týž pozorovatelem a týž měřidly na témže pracovišti ve velmi krátkých časových intervalech, za stanovených podmínek. Reprodukovatelnost měření je míra proměnlivosti, vyjadřující těsnost shody mezi výsledky měření téže veličiny, jsou-li jednotlivá měření prováděna různými metodami, s použitím různých měřidel, různými pozorovateli na různých pracovištích, po dostatečně dlouhých časových intervalech (vzhledem k trvání jednoho měření) a za rozdílných podmínek měření.

Směrodatná odchylka s_w nám spolu s aritmetickým průměrem \bar{w} poskytuje úplnou informaci o skutečné hodnotě w^* , jakou můžeme získat z naměřeného souboru: s pravděpodobností P leží skutečná hodnota w^* měřené veličiny v intervalu $(\bar{w} - k \cdot s_w, \bar{w} + k \cdot s_w)$, kde k je číslo odpovídající hodnotě pravděpodobnosti P a počtu měření N (tabulka 9).

Výsledek měření zapisujeme ve tvaru

$$w = \bar{w} \pm k \cdot s_w \quad ; \quad (41)$$

vždy k němu uvedeme zvolenou hodnotu pravděpodobnosti nebo název chyby, k níž jsme určili číslo k .

Můžeme připojit i relativní chybu podle vztahu (3) nebo (3a), kde místo skutečné chyby, $\varepsilon_1 = w_i - w^*$, dosadíme chybu $k \cdot s_w$ a místo skutečné hodnoty w^* její odhad \bar{w}

$$\delta = \frac{k \cdot s_w}{\bar{w}} \quad , \quad (42)$$

nebo v procentech

$$\delta = \frac{k \cdot s_w}{\bar{w}} \cdot 100 \% \quad . \quad (42a)$$

Jak už bylo uvedeno, dáváme ve výsledku měření přednost mezní chybě ($P = 1$).

4.4.8 Zaokrouhlení chyby a aritmetického průměru. Zápis výsledku měření

Na chvíli teď zdánlivě odbočíme a zavedeme si pojem počet platných míst nějakého čísla těmito pravidly:

- První nenulová číslice v zápisu daného čísla zaujímá nejvyšší platné místo. V následujících číslech je číslice zaujímající nejvyšší platné místo podtržena: 123,05; 0120; 0,0035.
- U čísel s desetinnou čárkou zaujímá poslední udaná číslice nejnižší platné místo (tedy např. 123,05; 0,0035; 123,00).
- U čísel bez desetinné čárky zaujímá nejnižší platné místo poslední nenulová číslice (tedy např. 0120; 13; 13 000).
- Všechny číslice mezi nejnižším a nejvyšším platným místem zaujímají také platná místa.

Následující čísla mají tedy čtyři platná místa: 1 234; 123 400; 123,4; 1,001; 1,000; 10,10; 0,000 1010; 100,0.

Chybu výsledku (ať už je to směrodatná odchylka, mezní chyba, pravděpodobná chyba - absolutní či relativní) zaokrouhlujeme na jedno, nejvýše na dvě platná místa. Pokud je uváděný výsledek konečný, tj. nepoužíváme ho k dalším výpočtům, stačí se omezit na jedno platné místo. Pokud s ním provádíme další výpočty, je lepší uvést dvě platná místa, abychom snížili chyby ze zaokrouhlování.

Aritmetický průměr pak zaokrouhlíme na číslici téhož řádu, jako je nej-
nižší platné místo chyby.

Zápis výsledků měření

Příklad 6. a) Správně zapsané výsledky měření

1. S chybou udanou na jedno platné místo:

$$a = (23,5 \pm 0,6) \text{ mm}$$

nebo třeba

$$a = (2,35 \pm 0,06) \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$T = (327 \pm 4) \text{ K}$$

$$P = (9600 \pm 100) \text{ W}$$

nebo

$$P = (9,6 \pm 0,1) \text{ kW}$$

2. S chybou udanou na dvě platná místa:

$$a = (23,49 \pm 0,56) \text{ mm}$$

$$T = (327,0 \pm 4,5) \text{ K}$$

$$P = (9630 \pm 120) \text{ W}$$

b) Nesprávně zapsané výsledky měření:

1. $r = 0,587234810 \pm 0,009932871$

Oprava: není zaokrouhlena chyba, není zaokrouhlen aritmetický průměr,
není uvedena jednotka.

Správně má být: v konečném výsledku

$$r = (0,59 \pm 0,01) \text{ cm} \quad \text{nebo} \quad r = (5,9 \pm 0,1) \text{ mm},$$

v mezivýpočtech

$$r = (0,5872 \pm 0,0099) \text{ cm} \quad \text{nebo} \quad r = (5,872 \pm 0,099) \text{ mm}.$$

2. $J = 32893,4 \pm 275 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Oprava: opět nejsou zaokrouhleny ani chyba, ani aritmetický průměr;
chybí závorky, označující, že jednotka se vztahuje i k arit-
metickému průměru.

Správně má být: v konečném výsledku

$$J = (32900 \pm 300) \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad \text{nebo} \quad J = (32,9 \pm 0,3) \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

v mezivýpočtech

$$J = (32890 \pm 280) \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad \text{nebo} \quad J = (32,89 \pm 0,28) \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

V odborných textech se můžeme setkat se dvěma případy, kdy jsou hodnoty fyzikálních veličin zapsány bez vyznačení chyby. Buď je takový údaj defini-
torický - a pak obvykle má u sebe doplňující označení "přesně"; nebo, jedná-li
se o skutečně změřenou hodnotu, je odpovídající chyba nejvýše rovna polovině
řádu posledního platného místa uvedeného čísla. S prvním případem jste se
setkali už v tomto textu, v kapitole o vedlejších a neplatných jednotkách

(odst. 2.2.5, tab. 4 a 5). Druhým případem může být např. údaj $v = 4 \text{ m.s}^{-1}$; chyba je pak nejvýše $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ (tj. je to mezní chyba); můžeme to zapsat ve tvaru $v = (4,0 \pm 0,5) \text{ m.s}^{-1}$.

Někdy je potřeba uvádět zaokrouhlené hodnoty i v průběhu vyhodnocení naměřených údajů - nejen ve výsledcích. Např. i hodnoty uváděné v tabulkách ve zprávě o měření jsou zatížené chybami - a je potřeba je zaokrouhlit stejným způsobem jako aritmetický průměr.

Příklad 7. Zaokrouhlování vypočítaných hodnot v průběhu vyhodnocení naměřených údajů

Předpokládejme, že jsme např. během pokusu třicetkrát změřili milimetrovým měřítkem rozměr tělesa označený a . Vzhledem k použitému měřítku jsme jednotlivé naměřené hodnoty zaznamenali jako celá čísla s jednotkou milimetr. Vydělením součtu všech naměřených (celočíslných) hodnot počtem měření (30) jsme jako číselnou hodnotu aritmetického průměru \bar{a} určili třeba číslo 23,4948270. Pro výpočet směrodatné odchylky aritmetického průměru $s_{\bar{a}}$ pomocí vztahu (40) aritmetický průměr opět zaokrouhlíme - a to na číslici téhož řádu, jaký má poslední uváděná číslice jednotlivých měření (v našem případě $\bar{a} = 23 \text{ mm}$) nebo na číslici o jeden řád nižší (tj. $\bar{a} = 23,5 \text{ mm}$). Zde bychom se sice žádné chyby nedopustili, kdybychom $s_{\bar{a}}$ vypočítali bez zaokrouhlení \bar{w} ; použití nezaokrouhleného čísla však může, zvláště při ručním počítání, snadno vést k výpočetním chybám.

SHRNUTÍ I: Určení výsledků přímého měření spojitě náhodné veličiny

1. Pro sadu naměřených hodnot w_1, w_2, \dots, w_N určíme

$$\text{aritmetický průměr: } \bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$$

$$\text{a směrodatnou odchylku jednoho měření: } s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}.$$

2. Vyloučíme hrubé chyby a znovu vypočtáme \bar{w} a s . Dále určíme

směrodatnou odchylku aritmetického průměru:

$$s_{\bar{w}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}.$$

3. Hledáme a korigujeme systematické chyby.

4. Směrodatnou odchylku i aritmetický průměr zaokrouhlíme.

5. Zvolíme pravděpodobnost P a s přihlédnutím k počtu měření N najdeme odpovídající číslo k .

6. Výsledek zaokrouhlíme a zapíšeme ve tvaru

$$w = \bar{w} \pm k \cdot s_{\bar{w}},$$

případně uvedeme i relativní chybu

$$\delta = \frac{k \cdot s_{\bar{w}}}{\bar{w}} \left(= \frac{k \cdot s_{\bar{w}}}{\bar{w}} \cdot 100 \% \right).$$

Výsledkem měření tedy není, a principiálně ani nemůže být, přesné číslo rovné skutečné hodnotě měřené veličiny, ale interval, v němž skutečná hodnota leží s jistou pravděpodobností.

V dalším odstavci si ukážeme, že do chyby výsledku měření je kromě směrodatné odchylky potřeba započítat i chyby měřidel. Předtím však ještě probereme dva příklady, shrnující naše dosavadní poznatky o zpracování výsledků měření.

Příklad 8. Určení střední hodnoty a mezní chyby při dostatečném počtu měření

Vrátíme se k torznímu kyvadlu. V příkladu 5 jsme uvažovali o měření jeho doby kmitu. Nyní budeme zpracovávat soubor naměřených hodnot průměru d_1 jeho závěsného drátu.¹⁰⁾ Drát může mít v různých místech trochu odlišný průměr; jeho průřez nemusí být po celé délce kruhový. Proto byl průměr d_1 změřen na deseti různých místech, vždy ve dvou navzájem kolmých směrech. Celkový počet naměřených hodnot d_1 je tedy $N = 20$ (tabulka 11).

Měření bylo provedeno mikrometrem. Přesnost měřidla zatím nebudeme brát v úvahu a budeme také předpokládat, že měřené hodnoty jsou zatíženy jen náhodnými chybami.

Zpracování naměřených hodnot bude tedy provedeno postupem uvedeným v předcházejícím Shrnutí I.

Tabulka 11. Naměřené hodnoty průměru drátu

Pořad.č.měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{d_1}{\text{mm}}$	1,01	1,05	0,97	1,00	1,03	1,03	1,04	1,02	1,00	1,03
Pořad.č.měření	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\frac{d_1}{\text{mm}}$	0,99	1,00	1,00	0,94	1,02	0,99	0,95	1,01	0,97	0,98

¹⁰⁾ Hodnoty doby kmitu a průměru závěsného drátu torzního kyvadla jsou, kromě dalších údajů, potřebné při určení modulu pružnosti závěsu ve smyku. Podrobná informace o tomto měření je uvedena v [2], str. 8 - 10 a [3], str. 127.

Vypočítáme aritmetický průměr $\bar{d} = \frac{1}{20} (d_1 + d_2 + \dots + d_{20}) = 1,0015 \text{ mm}$.

Zaokrouhlíme na číslici o jeden řád nižší než mají naměřené hodnoty:
 $\bar{d} = 1,002 \text{ mm}$.

Dále vypočítáme směrodatnou odchylku jednoho měření.

$$s = \sqrt{\frac{1}{19} [(d_1 - \bar{d})^2 + (d_2 - \bar{d})^2 + \dots + (d_{20} - \bar{d})^2]} = 0,0292898402 \text{ mm.}^{11)}$$

Tuto chybu zaokrouhlíme na dvě platná místa:

$$s = 0,029 \text{ mm}.$$

Zjistíme, že se žádná z naměřených hodnot neodchyluje od aritmetického průměru \bar{d} o více než $3s = 0,087 \text{ mm}$. Kdybychom takovou odchylku našli, neprohlásili bychom ji za hrubou chybu, dokud bychom se nepřesvědčili, že není způsobena např. tím, že drát je v některém místě silně zúžený.

Určíme nyní směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$s_{\bar{d}} = \frac{s}{\sqrt{20}} = 0,0064845971 \text{ mm.}^{12)}$$

a zaokrouhlíme ji (pokud už s ní nebudeme dále počítat) na jedno platné místo:

$$s_{\bar{d}} = 0,006 \text{ mm}.$$

Ve výsledku uvedeme mezní chybu. Pro $P = 0,997$ je při počtu měření $N = 20$ odpovídající číslo $k = 3$. Mezní chyba je $3 s_{\bar{d}} = 0,018 \text{ mm}$ a po zaokrouhlení opět na jedno platné místo $0,02 \text{ mm}$.

Výsledek měření je

$$d = (1,00 \pm 0,02) \text{ mm},$$

$$s \text{ relativní mezní chybou } \delta = \frac{0,02 \text{ mm}}{1,00 \text{ mm}} = 0,02, \text{ tj. } 2\%.$$

Příklad 9. Určení střední hodnoty a směrodatné odchylky při malém počtu měření

I v tomto příkladu nebudeme uvažovat chyby měřidel a budeme předpokládat, že naměřené hodnoty jsou zatíženy jen náhodnými chybami.

Při měření povrchového napětí kapalin se určuje síla F potřebná k vytržení drátěného rámečku z hladiny kapaliny. Na torzních vahách se při měření této síly odečítají hodnoty odpovídající hmotnosti m ; $F = mg$ (g je tíhové zrychlení).¹³⁾ Zpracujeme soubor naměřených hodnot m_i

¹¹⁾ Výpočty jsou provedeny pomocí programovatelného kalkulátoru TI-58; zde jsou opsány celé výsledky z jeho displeje - ačkoliv víme, že to nemá smysl, protože vzhledem k chybám měření je v těchto výsledcích zaručen jen mnohem menší počet platných míst. Do zprávy o měření uvádíme vždy už jen zaokrouhlené hodnoty.

¹²⁾ Viz předchozí poznámka 11).

¹³⁾ Podrobný popis této metody měření povrchového napětí je uveden v [2], s. 35-37 a [3], s. 150-152

(tabulka 12).

Tabulka 12. Naměřené hodnoty hmotnosti

Pořadové číslo měření	1	2	3	4	5	6
$\frac{m_i}{\text{mg}}$	552,0	552,4	547,0	551,8	552,0	552,4

Určíme aritmetický průměr

$$\bar{m} = \frac{1}{6} (m_1 + \dots + m_6) = 551,27 \text{ mg}$$

a směrodatnou odchylku

$$s = \sqrt{\frac{1}{5} [(m_1 - \bar{m})^2 + \dots + (m_6 - \bar{m})^2]} = 2,1 \text{ mg.}$$

Pro vyloučení hrubých chyb můžeme použít druhého z kritérií uvedených v odst. 4.4.6. Při tomto velmi jemném měření s torzními vahami se totiž velmi snadno stane, že se při otřesech stolu drátek vytrhne z kapaliny dříve a naměřená hmotnost je pak nižší. Vypočítáme číslo t podle vzta-
hu (39)

$$t = \frac{|m_i - \bar{m}|}{s}$$

pro třetí z naměřených hodnot, která se nejvíce odlišuje od aritmetické-
ho průměru: $t = 2,05$ a porovnáme je s číslem t_a pro $N = 6$ měření z ta-
bulky 10, $t_a = 1,996$. Protože je $t > t_a$, budeme třetí hodnotu považovat
za hrubě chybnou a z dalšího zpracování ji vyloučíme. Pro ostatní z na-
měřených hodnot platí $t < t_a$.

Znovu vypočítáme aritmetický průměr a směrodatnou odchylku jednoho
měření,

$$\bar{m} = 552,12 \text{ mg,}$$

$$s = 0,0085 \text{ mg.}$$

Směrodatná odchylka aritmetického průměru je

$$s_{\bar{m}} = \frac{s}{\sqrt{5}} = 0,0038 \text{ mg.}$$

Mezní chyba pro $P = 0,995$ a $N = 5$ (číslo k podle tabulky 9) je
 $5,6 s_{\bar{m}} = 0,02 \text{ mg}$. Změřená hmotnost je rovna $m = (552,12 \pm 0,02) \text{ mg}$;
relativní mezní chyba je $4 \cdot 10^{-5}$, tj. $0,004 \%$.¹⁴⁾

¹⁴⁾ K tomuto výsledku a k výsledku příkladu 8 se vrátíme na konci příš-
tího odstavce pojednávajícího o chybách měřidel (příklad 11). Uvi-
díme, že na rozdíl od příkladu 8 je tato chyba zanedbatelná vůči
chybě torzních vah použitých při měření.

4.5 Chyby měřidel

4.5.1 Základní pojmy

Praktická zkušenost získaná při měřeních prováděných v běžném životě vede ke vzniku jistých návyků, které se zdají být tak samozřejmé, že si jejich existenci ani neuvědomujeme. Kdybychom například měli měřit jednu čas, který potřebuje sportovec k uběhnutí vzdálenosti 100 m a podruhé čas, potřebný k uvaření vajec natvrdo, víme, že v prvním případě musíme použít stopek a v druhém vystačíme třeba s přesýpacími hodinami. Nenapadlo by nás použít těchto měřidel obráceně. Ve složitějších případech a nových situacích nám však obdobné návyky chybí. Nepřihlédnutí k vlastnostem používaných měřidel může vést k tomu, že se dopouštíme obdobné chyby, jako kdybychom měřili dobu běhu sportovce přesýpacími hodinami; přesnost měřidla není v tomto případě v souladu s požadovanou přesností měření dané veličiny. Bývá užitečné řídit se empirickým pravidlem, že přesnost měřidla má být pětikrát až desetkrát vyšší, než je požadovaná přesnost měření.

K dalšímu omylu mohou vést vztahy pro výpočet směrodatné odchylky (38) a (40), z nichž by se mohlo soudit, že chybu měření je možné libovolně zmenšovat se zvyšováním počtu měření. Směrodatná odchylka však charakterizuje jen část chyb měření; vliv omezené přesnosti měřidla a příspěvek systematických chyb (jejichž zdrojem je mj. samotné měřidlo) nelze zanedbat.

Dále se proto budeme měřidlům a jejich přesnosti věnovat podrobněji.

Měřicím prostředkem můžeme nazvat jakýkoliv objekt, kterého se používá k měření; nás budou zajímat měřidla, která rozdělujeme na míry a měřicí přístroje.

Míry reprodukuji během svého používání trvalým způsobem jeden nebo několik hodnot dané veličiny. Nemají ukazatele a žádná jejich součást se při měření nepohybuje. Příkladem míry je pásové měřítko, závaží, odporový normál.

Měřicí přístroje používáme zpravidla k přeměně měřené veličiny na ekvivalentní údaj (informaci). Příkladem jsou posuvné měřítko, teploměr, voltmetr apod. Podle funkce je dělíme na indikační, udávající hodnotu měřené veličiny polohou ukazatele na stupnici, registrační, zaznamenávající trvale měřenou veličinu, signalizační, digitální apod. Zde se omezíme jen na přístroje indikační. Z hlediska vlastního měření jsou měřicí přístroje charakterizovány řadou vlastností resp. parametrů, jako například:

1. celkový rozsah stupnice - oblast stupnice mezi měřicími značkami, odpovídajícími nejmenší a největší hodnotě stupnice (některé přístroje mají několik dílčích rozsahů),
2. měřicí rozsah - část celkového rozsahu stupnice, pro kterou nesmějí být údaje měřidla zatíženy větší chybou, než je mezní chyba (viz odst.4.5.2),
3. délka dílku stupnice - vzdálenost mezi dvěma následujícími měřicími značkami stupnice,

4. hodnota dílku stupnice - velikost změny měřené veličiny odpovídající změně údaje o jeden dílek stupnice. Je to nejmenší možná měřená změna veličiny, kterou lze na stupnici číst bez odhadování zlomků dílků,
5. citlivost měřidla - podíl změny údaje přístroje ke změně hodnoty měřené veličiny,
6. pohyblivost měřidla - poměr nejmenší pozorovatelné změny údaje přístroje k odpovídající změně měřené veličiny,
7. přesnost měřidla - charakterizuje jeho schopnost udávat za stanovených podmínek měření hodnoty blízké skutečné hodnotě měřené veličiny. Je to souhrnná vlastnost měřidla, vyjadřující chyby (systematické i náhodné), které měřidlo vnáší do měření. Klasifikačním označením přesnosti měřidla je třída přesnosti. Uvedením třídy přesnosti výrobce měřidla zaručuje, že jeho chyby (systematické i náhodné) nepřekročí stanovenou mez.

4.5.2 Určování chyb některých měřidel

Pro různé druhy měřidel je způsob určování přesnosti a označování třídy přesnosti různý a je předepsán státními normami. V následujícím výkladu ukážeme, jak se určí chyba měř a některých indikačních přístrojů.

Chyba měřidla se udává jako mezní chyba. Její význam je analogický jako u mezní chyby určené ze směrodatné odchylky: s pravděpodobností P , která je blízká 1, nevybočí naměřené hodnoty z intervalu, který kolem střední hodnoty měřené veličiny vymezuje chyba měřidla. Chyba měřidla v sobě obsahuje náhodnou i systematickou složku,

Chybu míry nebo indikačního přístroje odhadneme zpravidla hodnotou 1 nebo 1/2 dílku stupnice. Zkušený experimentátor je schopen odhadnout i desetiny, je-li délka dílku asi 0,7 mm až 7 mm. Při určení chyby měřidla tímto způsobem vezmeme v úvahu podmínky měření i naše vlastní schopnosti číst údaje měřidla a odhadnout zlomky dílků stupnice.

Např. u pásového (milimetrového) měřítka odhadneme chybu na 0,5 až 1 mm; podobně u teploměru, stopek. U digitálních stopek, které jsou schopné měřit třeba s přesností 0,01 s, vezmeme v úvahu i vlastní reakční dobu,¹⁵⁾ spínáme-li je ručně.

¹⁵⁾ Změřte si vlastní reakční dobu, např. tímto způsobem: Kamarád vám podrží svisle za horní konec dlouhé pravítka. Připravíte si ruce u jeho dolního konce tak, aby plochy dlaní byly svislé a asi 5 cm vzdálené. V okamžiku, na který nejste předem upozorněni, je pravítka volně puštěno a vy se snažíte zachytit je do dlaní. Z délky části pravítka, která vám mezi dlaněmi uteče při opožděné reakci, je možné s použitím zákona dráhy volného pádu určit reakční dobu.

U posuvného měřítka odhadujeme chybu podle počtu dílků nonia - na 0,1 mm, je-li nonius desetidílkový a na 0,05 mm, je-li nonius dvaceticílkový. Podobně přesnost mikrometru odhadneme na 0,01 mm nebo 0,005 mm, podle počtu dílků na otočné hlavici.

U elektrických měřicích přístrojů udává výrobce třídou přesnosti. Je označena jedním z následujících čísel: 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5 a 5. Toto číslo vyjadřuje relativní mezní dovolenou chybu přesnosti, udanou v procentech. Její význam název dobře vystihuje: Je-li přístroj použit za vztažných podmínek, zaručuje výrobce, že v rozmezí měřicího rozsahu přístroje nepřekročí celková (tj. systematická i náhodná) chyba měřené veličiny mezní dovolenou chybu. Vztažné podmínky jsou normativně určeny a zpravidla je udává výrobce v návodu k měřicímu přístroji. Jsou to podmínky nutné k jeho správné funkci (např. poloha přístroje při měření, teplota okolního prostředí, frekvence, napětí apod.).

Ukážeme si nyní, jak se určuje chyba elektrických měřicích přístrojů s rovnoměrnou stupnicí z třídy přesnosti pro libovolnou měřenou hodnotu.

Máme-li např. voltmetr s rozsahem od hodnoty 0 V do U_m a s třídou přesnosti p , je mezní dovolená chyba ΔU v celém rozsahu rovna $p\%$ z nejvyšší hodnoty U_m :

$$\Delta U = U_m \frac{p}{100} \quad (43)$$

a je stejná pro všechny měřené hodnoty U v daném rozsahu. Relativní mezní dovolená chyba je rovna

$$\delta = \frac{\Delta U}{U} = \frac{U_m}{U} \frac{p}{100} \quad (44)$$

nebo v procentech

$$\delta = \frac{\Delta U}{U} 100\% = \frac{U_m}{U} p\% \quad (45)$$

Čím menší je měřená hodnota U , tím větší je podle posledního vztahu relativní chyba; z toho je vidět, že relativně nejpřesněji měříme, je-li měřená hodnota U blízká nejvyšší hodnotě U_m .

Podobně určujeme mezní dovolenou chybu i u dalších indikačních přístrojů s rovnoměrnou stupnicí. U přístrojů s nerovnoměrnou stupnicí (např. logaritmickou nebo hyperbolickou) je chyba vyjádřena jinak než v procentech nejvyšší hodnoty měřicího rozsahu; zde však se jimi nebudeme zabývat.¹⁶⁾

Příklad 10. Určení mezní dovolené chyby voltmetru

Mějme voltmetr s rozsahem 0 - 100 V a třídou přesnosti 1. Mezní dovolená chyba je v celém rozsahu stejná - 1% ze 100, tj. $\Delta U = 1$ V. Relativní chyba je však tím větší, čím menší hodnotu napětí U měříme. Ukazuje to tabulka 13.

¹⁶⁾ Podrobnosti stanoví norma ČSN 356201.

Tabulka 13. Absolutní a relativní mezní dovolená chyba

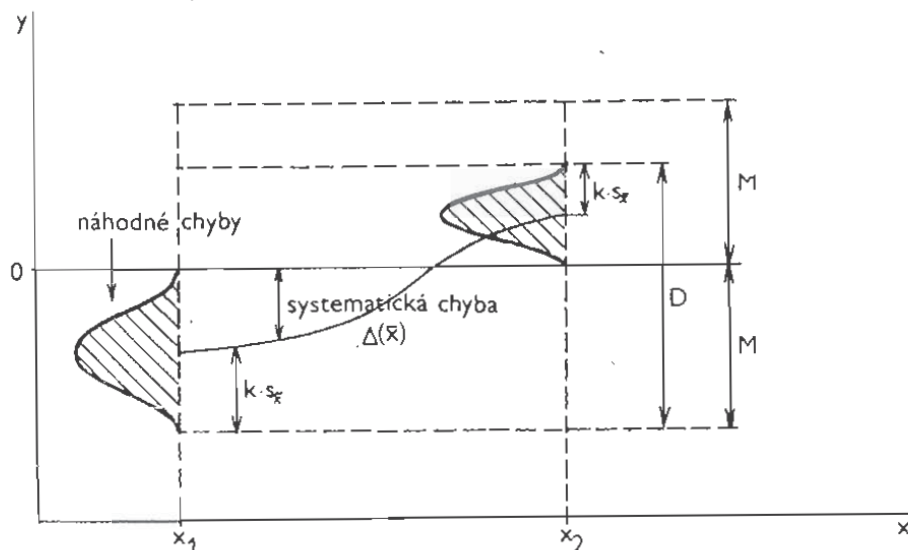
Měřená hodnota napětí $\frac{U}{V}$	Absolutní mezní do- volená chyba $\frac{\Delta U}{V}$	Relativní mezní dovole- ná chyba $\delta = \frac{\Delta U}{U} 100 \%$
100	1	1 %
50	1	2 %
20	1	5 %
10	1	10 %
1	1	100 % !

Použijeme-li přístroje k měření za vztažných podmínek, udává třída přesnosti mezní dovolenou chybu, zaručenou výrobcem pro daný druh a typ měřidla (pro všechny vyráběné kusy). V průběhu měření se prakticky nesetkáme s chybami většími. Může se však stát, že konkrétní přístroj, který používáme (daný kus), má mezní chyby menší, než odpovídá udané třídě přesnosti.

V případě potřeby můžeme určit skutečnou mezní chybu přístroje pomocí etalonů s vyšší přesností. Je přitom možné určit nejen celkovou chybu, ale rozlišit i její náhodnou a systematickou složku.

Postupujeme podobně jako při cejchování přístroje. Přístrojem změříme hodnotu etalonu a určíme odchylku naměřené hodnoty od jeho udané (nominální) hodnoty. Opakovaným měřením je možné z těchto odchylek určit náhodnou a systematickou chybu. Pomocí etalonů různých hodnot můžeme určit i průběh obou chyb v celém měřicím rozsahu.

Jedna z možných situací, s nimiž se můžeme setkat, je znázorněna



Obr. 15. Určení náhodné a systematické chyby měřicího přístroje

na obr. 15. Na ose x jsou vyneseny hodnoty stupnice zkoumaného přístroje, x_1 a x_2 jsou nejnižší a nejvyšší hodnoty jeho měřicího rozsahu. Na ose y jsou vyneseny odchylky naměřených hodnot od hodnot etalonů. Pro každou hodnotu $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ můžeme z opakovaných měření určit aritmetický průměr \bar{x} a směrodatnou odchylku aritmetického průměru $s_{\bar{x}}$. Odchylka aritmetického průměru od hodnoty etalonu udává systematickou chybu zkoumaného přístroje pro danou hodnotu x . Na obr. 15 jsou tyto odchylky v celém rozsahu měřidla znázorněny křivkou označenou $\Delta(\bar{x})$.

Náhodné chyby jsou v obr. 15 pro větší přehlednost znázorněny jen pro nejnižší a nejvyšší hodnotu rozsahu měřidla x_1 a x_2 , pomocí grafů hustoty pravděpodobnosti¹⁷⁾ - normálních křivek. Z nich můžeme vyčíst hodnotu mezní chyby $k \cdot s_{\bar{x}}$.

Nejnižší a nejvyšší bod hodnot odchylek vynášených na ose y vymezuje interval D , v němž se pohybují chyby zkoumaného přístroje v daném měřicím rozsahu $\langle x_1, x_2 \rangle$. Najdeme nyní nejmenší interval o délce $2M$, symetricky rozložený kolem přímky $y = 0$, který v sobě obsahuje interval D . M pak udává absolutní mezní dovolenou chybu zkoumaného přístroje.

Při sériové výrobě běžných měřicích přístrojů není ovšem takto proměřován každý jednotlivý vyrobený kus. Proto třída přesnosti odpovídá intervalu většímu než $2M$ jednoho přístroje a vyhovují jí všechny kusy, které dá výrobce do prodeje.

4.6 Celková chyba přímých měření

Přímá měření jsou zatížena systematickými i náhodnými chybami; přitom oba tyto druhy chyb mohou pocházet z různých zdrojů (viz odst. 4.1 a 4.3). Schematicky to ukazuje tabulka 14. Její plocha ($A + \dots + J$) znázorňuje celkovou chybu, jakou mohou být zatíženy naměřené hodnoty.

Tabulka 14. Náhodné a systematické složky celkové chyby měření

Zdroj Druh chyby	vzo- rek	pro- středí	pozoro- vatel	měřid- lo	meto- da
náhodné	A	B	C	D	E
systematické	F	G	H	I	J

¹⁷⁾ Hustota pravděpodobnosti je vlastně v obr. 15 třetí proměnnou, vedle x a y . Je potřeba si ji proto představit jako postavenou do třetího rozměru nad rovinu obrázku.

Předpokládejme, že jsme z těchto chyb vyloučili ty systematické chyby, které se nám podařilo rozpoznat (viz odst. 4.3). Kromě náhodných chyb, které principiálně nelze vyloučit, zatěžuje výsledky měření obecně ještě část nerozpoznaných systematických chyb. Budeme nyní hledat charakteristiku, která by tuto celkovou chybu, složenou z chyb náhodných a z nerozpoznaných chyb systematických, vhodným způsobem vystihla.

Zatím umíme určit:

1. směrodatnou odchylku, která charakterizuje náhodnou složku celkové chyby měření souhrnně pro všechny zdroje chyb (v tabulce 14 je to vystiženo políčky A + B + C + D + E);
2. chybu měřidla, která vystihuje všechny chyby měřidla, tj. náhodné i systematické (políčka D + I v tabulce 14).

Pro postižení zbývajících chyb, které mohou naměřené hodnoty ovlivňovat (políčka F, G, H, J v tabulce 14) nemáme k dispozici žádnou charakteristiku.

Celkovou chybu $u_{\bar{w}}$ budeme proto skládat z chyby vypočtené ze směrodatné odchylky aritmetického průměru $k \cdot s_{\bar{w}}$ a z chyby měřidla Δw . Ukazuje se, že v praxi zpravidla vyhovuje pro celkovou chybu vztah

$$u_{\bar{w}, \text{stř}} = \sqrt{(k \cdot s_{\bar{w}})^2 + (\Delta w)^2}. \quad (46)$$

Je to vztah empirický, v němž je postižena skutečnost, že se obě chyby $k \cdot s_{\bar{w}}$ a Δw překrývají (políčko D v tabulce 14). Pokud bychom se domnívali, že tomu tak není (tj. že políčko D je prázdné, náhodné chyby dané měřidlem jsou zanedbatelné vůči náhodným chybám z ostatních zdrojů), dáme přednost méně příznivému odhadu celkové chyby,

$$u_{\bar{w}, \text{max}} = k \cdot s_{\bar{w}} + \Delta w. \quad (47)$$

Chyba vypočítaná podle vztahu (46) se nazývá střední celková chyba, podle vztahu (47) maximální celková chyba.

Chyba měřidla je chybou mezní. Pokud je číslo k takové, že $k \cdot s_{\bar{w}}$ je také mezní chyba (tj. je určeno pro vysokou hodnotu pravděpodobnosti, $P \approx 1$, a s ohledem na provedený počet měření), je celková chyba, ať ji vypočteme podle vztahu (46) nebo (47), také chybou mezní.

Celková chyba $u_{\bar{w}}$ je chyba absolutní. Známým způsobem, pomocí vztahu (3), můžeme určit i relativní celkovou chybu,

$$\delta = \frac{u_{\bar{w}}}{\bar{w}}, \quad (48a)$$

nebo v procentech

$$\delta = \frac{u_{\bar{w}}}{\bar{w}} 100 \%. \quad (48b)$$

Výsledek zaokrouhlíme podle pravidel uvedených v odst. 4.4.8 a zapíšeme ve tvaru

$$w = \bar{w} \pm u_{\bar{w}}. \quad (49)$$

Při skládání náhodné chyby a chyby měřidla mohou nastat tři případy:

1. $s_{\bar{w}}$ a Δw mají řádově stejnou velikost, obě se tedy v celkové chybě uplatní.
2. $s_{\bar{w}} \ll \Delta w$. Náhodnou složku celkové chyby pak můžeme zanedbat a za celkovou chybu vzít chybu měřidla: $u_{\bar{w}} = \Delta w$. V takovém případě stačí provést jen velmi malý počet měření (např. $N = 1$).
3. $s_{\bar{w}} \gg \Delta w$. V tomto případě zanedbáme při výpočtu celkové chyby chybu měřidla $u_{\bar{w}} = k \cdot s_{\bar{w}}$. Pak je účelné pro snížení chyby provést pokud možno větší počet měření.

Zvyšování počtu měření má tedy smysl jen potud, pokud se to projeví v hodnotě celkové chyby, a to i po jejím zaokrouhlení na jedno platné místo.

Příklad 11. Určení celkové chyby při přímých měřeních

Vrátíme se k příkladům 8 a 9.

1. V příkladu 8 jsme vypočítali směrodatnou odchylku aritmetického průměru průměru drátu, $s_{\bar{d}} = 0,006$ mm, a z ní jsme určili mezní chybu $k \cdot s_{\bar{d}} = 0,02$ mm ($k = 3$ pro $P = 0,997$).

Měření bylo prováděno mikrometrem, jehož chyba je $\Delta d = 0,01$ mm.

Obě chyby mají srovnatelné velikosti a je třeba je započítat do celkové chyby; podle vztahu (46) dostaneme pro celkovou střední chybu

$$u_{\bar{d}} = \sqrt{(0,01)^2 + (0,02)^2} \text{ mm} = 0,022 \text{ mm.}$$

Chybu zaokrouhlíme na jedno platné místo a zapíšeme společně s aritmetickým průměrem, $\bar{d} = 1,00$ mm; výsledek graficky zvýrazníme.

$$\boxed{d = (1,00 \pm 0,02) \text{ mm.}}$$

Relativní celková chyba je $\delta = 2$ %. Je vidět, že přes srovnatelnou velikost se chyba mikrometru do celkové chyby nepromítla; celková chyba je stejná jako její náhodná složka.

Uvedené chyby jsou chyby mezní.

2. Podobně určíme celkovou chybu i v případě měření hmotnosti torzními vahami v příkladu 9. Použité torzní váhy měly chybu $\Delta m = 0,4$ mg. Směrodatná odchylka aritmetického průměru je $s_{\bar{m}} = 0,004$ mg, mezní chyba $k \cdot s_{\bar{m}} = 0,02$ mg ($k = 5,6$ pro $P = 0,995$ a $N = 5$). Chyba $k \cdot s_{\bar{m}}$ je tedy zanedbatelná vůči chybě vah Δm a celková chyba je proto

$$u_{\bar{m}} = \Delta m = 0,4 \text{ mg.}$$

Zaokrouhlíme odpovídajícím způsobem aritmetický průměr, $\bar{m} = 552,1$ mg, a zapíšeme výsledek měření:

$$m = (552,1 \pm 0,4) \text{ mg}$$

Relativní celková chyba je 0,07 %.

4.7 Chyby nepřímých měření

V předchozích odstavcích jsme se zabývali přímými měřeními, při nichž se hodnoty měřené veličiny určují bezprostředně z údaje měřidla. Nyní přejdeme k měření nepřímým, při nichž hodnotu zkoumané veličiny w získáme zprostředkovaně z jiných fyzikálních veličin x, y, z, \dots , jejichž hodnoty měříme přímou metodou.

Pro nepřímo měřenou veličinu w tedy platí:

$$w = f(x, y, z, \dots).^{18)} \quad (50)$$

Střední hodnotu této veličiny určíme dosazením středních hodnot veličin x, y, z, \dots do vztahu (50):

$$\bar{w} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots). \quad (51)$$

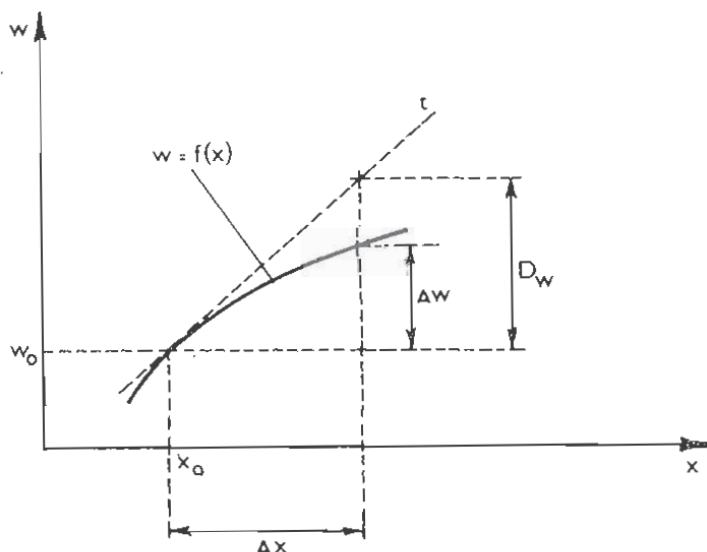
Tato hodnota je také zatížena chybou měření, která se do ní promítá prostřednictvím chyb, s nimiž byly změřeny veličiny x, y, z, \dots . K tomu, abychom mohli určit, jaká je chyba veličiny w , potřebujeme nejprve vědět, jakou změnu Δw vyvolá změna veličiny x o Δx , y o Δy , atd. Stručně to naznačíme v následujícím odstavci.

4.7.1 Přírůstek veličiny

Pro jednoduchost odvodíme vztah pro přírůstek v případě funkce jediné proměnné. Nechť veličina w je funkce jedné přímo měřené veličiny x :

$$w = f(x).$$

Hledáme odpověď na otázku, jak se změní w , změní-li se x o Δx . Všimneme si obr. 16.



Obr. 16. Přírůstek funkce

¹⁸⁾ O funkci f předpokládáme, že jsou pro ni splněny předpoklady pro existenci vlastní derivace ve všech bodech x, y, z, \dots v oboru, který uvažujeme. Tento případ je zpravidla pro fyzikální veličiny splněn.

Je na něm zakreslena část grafu funkce $f(x)$ mezi body $x_0, x_0 + \Delta x$. Veličina označená D_w je dána vztahem

$$D_w = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x_0} \cdot \Delta x = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \cdot \Delta x, \quad (52)$$

kde $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$ označuje hodnotu první derivace funkce f podle proměnné x v bodě x_0 a má geometrický význam směrnice tečny \perp sestrojené v bodě x_0 ke grafu $w = f(x)$.

Z obrázku 16 je zřejmé, že obecně $D_w \neq \Delta w$, že však zároveň platí

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} D_w = \Delta w. \quad (53)$$

Vždy lze tedy nalézt tak malé hodnoty Δx , že pro ně s předem zadanou přesností platí vztah

$$\Delta w = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \cdot \Delta x. \quad (54)$$

Pro funkci více proměnných bychom při odvození vztahu pro Δw postupovali obdobně, a to tak, že bychom sledovali postupně změnu Δw_x veličiny w způsobenou změnou Δx proměnné x - při ostatních proměnných y, z, \dots fixovaných (konstantních), změnu Δw_y veličiny w způsobenou změnou Δy veličiny y - při ostatních proměnných x, z, \dots fixovaných atd.

Tím je úloha určit přírůstek funkce více proměnných převedena na úlohu určit přírůsteky funkcí jedné proměnné:

$$w_x = f_x(x) = f(x, y = y_0, z = z_0, \dots)$$

$$w_y = f_y(y) = f(x = x_0, y, z = z_0, \dots).$$

Jejich přírůstky jsou podle vztahu (54)

$$\Delta w_x = \left(\frac{df_x}{dx}\right)_{x_0} \cdot \Delta x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0, z_0, \dots} \cdot \Delta x, \quad (55)$$

$$\Delta w_y = \left(\frac{df_y}{dy}\right)_{y_0} \cdot \Delta y = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0, z_0, \dots} \cdot \Delta y,$$

atd.

Výrazy na pravé straně ve vztazích (55) obsahují parciální derivace funkce f podle jednotlivých proměnných x, y, \dots : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots$, dostaneme je derivováním funkce (50) podle příslušné proměnné, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstantní.

Pro malé změny $\Delta x, \Delta y, \dots$ můžeme jednotlivé přírůstky $\Delta w_x, \Delta w_y, \dots$ sečíst a pro celkovou změnu Δw veličiny w dostaneme:

$$\Delta w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0, \dots} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0, \dots} \cdot \Delta y + \dots \quad (56)$$

Příklad 12. Výpočet parciálních derivací

Jedním z nepřímých měření je určování elektrického odporu R nějakého prvku v obvodu na základě napětí U na tomto prvku a proudu I , který

jím prochází. Podle Ohmova zákona má funkce (50) v tomto případě tvar (srov. příklad 4):

$$R = \frac{U}{I}.$$

Za výchozí bod $[x_0, y_0]$ vezmeme bod daný středními hodnotami $[U, I]$.

Fixujeme proměnnou I : $I = \bar{I}$ a počítáme parciální derivaci podle U :

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{U}{I} \right) = \frac{d}{dU} \left(\frac{U}{I} \right) = \frac{1}{I};$$

podobně určíme parciální derivaci podle I :

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{U}{I} \right) = \frac{d}{dI} \left(\frac{U}{I} \right) = -\frac{U}{I^2}.$$

V libovolném bodě $[U, I]$ je tedy

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \quad \text{a} \quad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}.$$

4.7.2 Náhodné chyby nepřímých měření

Budeme nyní postupovat podobně jako u přímých měření. Nejprve odvodíme vztah popisující rozložení náhodných chyb v základním souboru ($N \rightarrow \infty$) a od něj přejdeme k odhadům pro reálná měření, pro výběry ze základního souboru (N konečné).

Pro jednoduchost se omezíme na funkce dvou proměnných,

$$w = f(x, y); \quad (57)$$

analogické vztahy však platí i pro funkce více proměnných.

Označíme σ_x^2 , σ_y^2 a σ_w^2 rozptyly jednotlivých veličin. Podle (26) pro ně platí:

$$\sigma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2, \quad (58)$$

$$\sigma_y^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 \quad (59)$$

a

$$\sigma_w^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (w_i - \mu_w)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta w_i)^2, \quad (60)$$

kde μ_x , μ_y a μ_w jsou střední hodnoty veličin x , y , w .

Dále budeme upravovat vztah (60). Dosadíme do něho za Δw_i z rovnice (56). Pro malé hodnoty Δx_i a Δy_i dostaneme vztah

$$\sigma_w^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu} \cdot \Delta x_i + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu} \cdot \Delta y_i \right]^2. \quad (61)$$

Výchozí bod $[x_0, y_0]$ je nyní dán středními hodnotami $[\mu_x, \mu_y]$; u parciálních derivací je to souhrnně označeno indexem μ .

Vztah (61) dále upravíme:

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu}^2 (\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu}^2 (\Delta y_i)^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu} \Delta x_i \cdot \Delta y_i \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu}^2 (\Delta x_i)^2 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu}^2 (\Delta y_i)^2 + \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu} \Delta x_i \cdot \Delta y_i.\end{aligned}$$

Protože parciální derivace nezávisejí na indexu i , můžeme v úpravě pokračovat:

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu}^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu}^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta y_i)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \cdot \Delta y_i.\end{aligned}\quad (62)$$

Dá se dokázat, že pro nezávislé veličiny x , y , resp. pro nezávislý výskyt jejich chyb platí, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \cdot \Delta y_i = 0.\quad (63)$$

Použitím (59), (60) a (63) můžeme vztah (62) upravit do konečné podoby:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\mu}^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\mu}^2 \sigma_y^2.\quad (64)$$

Přechod od rozptylu σ_w^2 základního souboru ($N \rightarrow \infty$) k rozptylu s_w^2 výběrového souboru (N konečné) uskutečníme známým způsobem: ve vztazích (58), (59) a (60) vynecháme limitní přechod, místo $\frac{1}{N}$ budeme psát $\frac{1}{N-1}$ a střední hodnoty μ_x , μ_y a μ_w nahradíme aritmetickými průměry \bar{x} , \bar{y} a \bar{w} .

Dostaneme tak pro výběrový rozptyl

$$s_w^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \cdot s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \cdot s_y^2\quad (65)$$

a pro směrodatnou odchylku

$$s_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \cdot s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \cdot s_y^2}\quad (66)$$

Také směrodatná odchylka aritmetického průměru $s_{\bar{w}}$ souvisí se směrodatnou odchylkou s_w pro jednotlivé hodnoty stejně jako u přímých měření.

$$s_{\bar{w}} = \frac{s_w}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \cdot s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \cdot s_y^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} s_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} s_y\right)^2},$$

tedy

$$s_{\bar{w}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 s_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 s_{\bar{y}}^2}. \quad (67)$$

Pro zvolenou hodnotu pravděpodobnosti P můžeme, podobně jako u přímých měření, vypočítat k -násobek chyby s_w nebo $s_{\bar{w}}$. Je přitom potřeba také přihlídnout k počtu měření N .

4.7.3 Směrodatná odchylka v některých jednoduchých případech

Všimněme si některých jednoduchých a přitom často se vyskytujících tvarů funkce $w = f(x, y, \dots)$. Odvodíme pro ně ze vztahu (67) jednodušší výrazy pro výpočet směrodatné odchylky.

1. Pro funkci dvou proměnných

$$w = ax \pm by, \quad (68)$$

kde a, b jsou kladné konstanty, jsou parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \pm b,$$

tj.

$$s_{\bar{w}}^2 = a^2 \cdot s_{\bar{x}}^2 + b^2 \cdot s_{\bar{y}}^2. \quad (69)$$

Ačkoliv tedy uvažujeme i možnost znaménka "-", rozptyly veličin \bar{x} a \bar{y} se vždy (s příslušnými kladnými koeficienty a^2 a b^2) sčítají.

Platí-li $w = ax - by$, a tedy

$$\bar{w} = a\bar{x} - b\bar{y},$$

je relativní směrodatná odchylka aritmetického průměru dána výrazem

$$\frac{s_{\bar{w}}}{\bar{w}} = \frac{\sqrt{a^2 \cdot s_{\bar{x}}^2 + b^2 \cdot s_{\bar{y}}^2}}{a\bar{x} - b\bar{y}} \quad (70)$$

a pro malý rozdíl $a\bar{x} - b\bar{y}$ nabývá značných hodnot. Určování rozdílu dvou přibližně stejně velkých veličin může být zatíženo velkou relativní chybou.

V podobných situacích je vhodné hledat jiný způsob určení veličiny \bar{w} .

2. Předpokládejme, že veličina w je funkcí součinu dvou jiných veličin,

$$w = \pm a \cdot x \cdot y, \quad (71)$$

kde a je kladná konstanta. Pak je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}} = \pm a \bar{y}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}} = \pm a \bar{x}$$

a

$$s_{\frac{w}{x}}^2 = a^2 \bar{y}^2 \cdot s_{\bar{x}}^2 + a^2 \bar{x}^2 \cdot s_{\bar{y}}^2. \quad (72)$$

Druhá mocnina relativní směrodatné odchylky (relativní rozptyl) aritmetického průměru je dána výrazem

$$\frac{s_{\frac{w}{x}}^2}{\bar{w}^2} = \frac{a^2 \bar{y}^2 s_{\bar{x}}^2 + a^2 \bar{x}^2 s_{\bar{y}}^2}{a^2 \bar{x}^2 \bar{y}^2},$$

tj.

$$\frac{s_{\frac{w}{x}}^2}{\bar{w}^2} = \frac{s_{\bar{x}}^2}{\bar{x}^2} + \frac{s_{\bar{y}}^2}{\bar{y}^2}. \quad (73)$$

Vyjádřeno slovně to znamená, že relativní rozptyl aritmetického průměru veličiny w je dán součtem relativních rozptylů aritmetických průměrů přímo měřených veličin x a y .

3. Nechť

$$w = \pm a \left| \frac{x}{y} \right|, \quad (74)$$

kde a je kladná konstanta. Pro rozptyl aritmetického průměru platí

$$s_{\frac{w}{x}}^2 = \frac{a^2}{\bar{y}^2} s_{\bar{x}}^2 + \frac{a^2 \bar{x}^2}{\bar{y}^4} s_{\bar{y}}^2 \quad (75)$$

a pro relativní rozptyl

$$\frac{s_{\frac{w}{x}}^2}{\bar{w}^2} = \frac{s_{\bar{x}}^2}{\bar{x}^2} + \frac{s_{\bar{y}}^2}{\bar{y}^2}, \quad (76)$$

což je stejný výraz jako (73).

4. Předpokládejme, že

$$w = a x^{\pm b} \quad (77)$$

kde a a b jsou kladné konstanty. Přestože veličina w závisí na jediné proměnné x , můžeme pro výpočet směrodatné odchylky použít vztahu (67), neboť ten platí pro libovolný počet proměnných. Pro jedinou proměnnou je derivace

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{\bar{x}} = \pm a b \bar{x}^{\pm(b-1)},$$

takže

$$s_{\frac{w}{x}} = a b \bar{x}^{\pm(b-1)} s_{\bar{x}}. \quad (78)$$

a

$$\frac{s_{\frac{w}{x}}}{\bar{w}} = b \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \quad (79)$$

Relativní směrodatná odchylka aritmetického průměru veličiny w je tedy b -násobkem relativní směrodatné odchylky aritmetického průměru veličiny x . Platí to i obecněji: chyba v určení dílčí měřené veličiny přispívá k celkové chybě tím více, čím vyšší je její exponent v příslušné funkční závislosti $w = f(x, y, \dots)$. Snažíme se proto tyto veličiny měřit tím přesněji, čím vyšší je jejich exponent.

5. Poslední případ, kterého si všimneme, je funkční vztah

$$w = a e^{\pm b x}, \quad (80)$$

kde a, b jsou kladné konstanty a e je základ přirozených logaritmů.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}} = \pm a b e^{\pm b \bar{x}} \quad a$$

$$s_{\frac{w}{\bar{w}}} = a b e^{\pm b \bar{x}} \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}}. \quad (81)$$

Pro relativní směrodatnou odchylku aritmetického průměru dostáváme

$$\frac{s_{\bar{w}}}{\bar{w}} = b \frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}}. \quad (82)$$

4.7.4 Celková chyba nepřímých měření

Podobně jako u přímých měření (srov. odst. 4.6) zahrnujeme i u nepřímých měření do celkové chyby jednak náhodnou chybu danou násobkem směrodatné odchylky, jednak chybu měřidla.

Předpokládejme opět, že měřená veličina w je funkcí přímo změřených veličin x, y, \dots (vztah (50)) a že jsme určili směrodatné odchylky $s_{\bar{x}}, s_{\bar{y}}, \dots$ a mezní chyby měřidel $\Delta x, \Delta y, \dots$. Směrodatnou odchylku aritmetického průměru veličiny w umíme určit podle vztahu (67). Dá se dokázat, že i jednotlivé chyby měřidel se do celkové chyby promítají se stejnou vahou jako směrodatné odchylky, tj. s koeficientem daným parciální derivací podle příslušné proměnné. Pro zvolenou pravděpodobnost P a s přihlédnutím k počtu měření N dostaneme pro celkovou chybu nepřímo změřené veličiny $w = f(x, y, \dots)$ vztah

$$u_{\bar{w}, \text{stř}} = \sqrt{k^2 \cdot s_{\bar{w}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 \cdot (\Delta y)^2 + \dots} \quad (83)$$

Je to střední celková chyba. Pro její význam platí totéž, co pro střední celkovou chybu u přímých měření: pokud číslo k odpovídá vysoké hodnotě pravděpodobnosti ($P \approx 1$), je celková střední chyba daná vztahem (83) chybou mezní.

Někdy je výhodné počítat celkovou střední chybu pomocí jiného vztahu, který plyne ze vztahu (83), dosadíme-li v něm za $s_{\bar{w}}$ z (67):

$$u_{\bar{w}, \text{stř}} = \sqrt{k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 s_{\bar{x}}^2 + k^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 s_{\bar{y}}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{a}, \dots}^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 (\Delta y)^2 + \dots} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 (k^2 s_{\bar{x}}^2 + (\Delta x)^2)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 (k^2 s_{\bar{y}}^2 + (\Delta y)^2)^2 + \dots}$$

S uvážením vztahu (46) pro celkovou střední chybu přímých měření dostaneme výraz

$$u_{\bar{w}, \text{stř}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 u_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 u_{\bar{y}}^2 + \dots} \quad (84)$$

Lze ho, na rozdíl od vztahu (83), použít i v případě, je-li počet měření malý a různý pro veličiny x, y, \dots , a odpovídají-li tedy pro danou hodnotu pravděpodobnosti P veličinám x, y, \dots různá čísla k .

Kdybychom si v některém případě nebyli jisti tím, že střední chyba vystihuje celkovou chybu pro danou hodnotu pravděpodobnosti P , můžeme uvést maximální celkovou chybu. Určíme ji ze vztahu

$$u_{\bar{w}, \text{max}} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots} u_{\bar{x}} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots} u_{\bar{y}} + \dots \quad (85)$$

Většinou ovšem při zpracování výsledků měření vystačíme s chybou střední. Vztah pro maximální chybu je výhodné použít jako horní odhad chyby při přípravě měření, jako součást plánování přesnosti měření (viz odst. 6.2).

Ze vztahů pro výpočet celkové chyby je vidět, že při výpočtu aritmetického průměru \bar{w} postačí brát případné konstanty (např. π, e , rychlost světla c , tíhové zrychlení g apod.) jen asi o 1 řád přesněji, než je nejlepší přesnost aritmetických průměrů dílčích veličin x, y, \dots . Chyba způsobená zaokrouhlením konstanty se tak do celkové chyby nepromítne, protože je oproti chybám veličin x, y, \dots zanedbatelná. (Mezní chyba zaokrouhlené konstanty nepřevyšuje hodnotu 1 na řádovém místě daném posledním platným místem zaokrouhlené konstanty.)

Ze vztahu (84) je jeho srovnáním s (67) vidět, že pro výpočet celkové střední chyby je možné v jednoduchých případech funkčních závislostí (68), (71), (74), (77) a (80) použít analogických vztahů jako (69), (70), (72), (73), (75), (76), (78), (79) a (81), (82), nahradíme-li v nich všude

$$s_{\bar{w}} \longleftrightarrow u_{\bar{w}, \text{stř}}; \quad s_{\bar{x}} \longleftrightarrow u_{\bar{x}, \text{stř}} \quad \text{a} \quad s_{\bar{y}} \longleftrightarrow u_{\bar{y}, \text{stř}}$$

Příklad 13. Určení celkové střední chyby při měření elektrického odporu nepřímou metodou

Vrátíme se k příkladům 4 a 12, k měření elektrického odporu R nepřímou metodou pomocí proudu I procházejícího daným prvkem a napětí U na tomto prvku:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Obvykle má smysl měřit proud a napětí pouze jednou (nebo lépe dvakrát, aby se vyloučily případné hrubé chyby), protože směrodatné odchylky s_I a s_U jsou zpravidla zanedbatelně malé. Celkové chyby u_I a u_U jsou proto dány mezními dovolenými chybami ampérmetru a voltmetru, ΔI a ΔU , které určíme z tříd přesnosti.

Ampérmetr: třída přesnosti 0,5; rozsah 0 - 300 mA; naměřená hodnota 234 mA.

$$\text{Určení chyby: } \Delta I = \frac{0,5}{100} \cdot 300 \text{ mA} = 1,5 \text{ mA}.$$

$$\text{Výsledek: } I = (234 \pm 2) \text{ mA}; \text{ relativní chyba } 1 \text{ \%}.$$

Voltmetr: třída přesnosti 5; rozsah 0 - 60 V; naměřená hodnota 27 V.

$$\text{Určení chyby: } \Delta U = \frac{5}{100} \cdot 60 \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

$$\text{Výsledek: } U = (27 \pm 3) \text{ V}, \text{ relativní chyba } 11 \text{ \%}.$$

Celkovou střední chybu elektrického odporu určíme podle vztahu (83), v němž dosadíme $s_{\bar{w}} = s_{\bar{R}} = 0$ (nebo podle vztahu (84), v němž dosadíme $u_{\bar{x}} = u_I = \Delta I$, $u_{\bar{y}} = u_U = \Delta U$); parciální derivace máme připravené už z příkladu 12:

$$\begin{aligned} u_{\bar{R}, \text{stř}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)_{\bar{U}, \bar{I}}^2 (\Delta I)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)_{\bar{U}, \bar{I}}^2 (\Delta U)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{\bar{U}}{\bar{I}^2}\right)^2 (\Delta I)^2 + \left(\frac{1}{\bar{I}}\right)^2 (\Delta U)^2} = \sqrt{\left(\frac{27}{0,234^2}\right)^2 (0,002)^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{0,234}\right)^2 \cdot 3^2} \Omega = \sqrt{0,97 + 164,3} \Omega \approx 13 \Omega. \end{aligned}$$

Střední hodnota odporu je $\bar{R} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = 115 \Omega$.

Výsledek dostaneme po zaokrouhlení:

$$R = (120 \pm 10) \Omega, \text{ s relativní chybou } 8 \text{ \%}.$$

Uvedená celková chyba je chybou mezní.

Jednodušší by byl výpočet celkové střední chyby pomocí speciálního vztahu (76), kde bychom nahradili

$$\frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \leftrightarrow \frac{\Delta I}{\bar{I}}, \quad \frac{s_{\bar{y}}}{\bar{y}} = \frac{\Delta U}{\bar{U}} \text{ (srov. poslední poznámka před tímto příkladem).}$$

Jistě jste si všimli, že chyba napětí je značně větší než chyba proudu; celková chyba odporu je dána právě jen chybou napětí. Celková

chyba je také vzhledem k možnostem použití metody měření příliš velká. Zároveň spočívá v tom, že bylo použito nevhodného voltmetru, s příliš malou přesností ve srovnání s použitým ampérmetrem. Bylo třeba provést ještě před měřením odhad přesnosti, při němž by se tato nesrovnalost ukázala, a zvolit jiný měřicí přístroj.

Chybu napětí by také bylo možné zmenšit, kdybychom zvolili jiný, menší rozsah. Např. při rozsahu 0 - 30 V a stejné třídě přesnosti by absolutní chyba na tomto rozsahu byla $\Delta U = \frac{5}{100} \cdot 30 \text{ V} = 1,5 \text{ V}$. Relativní chyba pro naměřenou hodnotu by byla 6 %, a to je prakticky poloviční hodnota ve srovnání s měřením na rozsahu 0 - 60 V.

Jako další příklad může posloužit určení celkové chyby nepřímých měření ve vzorové zprávě o provedeném měření (příklad 29).

Příklad 14: Zaokrouhlení konstanty při výpočtu aritmetického průměru.

Vraťme se k torznímu kyvadlu v příkladu 5. Předpokládejme, že jsme změřili jeho dobu kmitu, $T = (2,2 \pm 0,1) \text{ s}$; je uvedena mezní chyba. Při určení úhlové frekvence tohoto kyvadla,

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

stačí vzít $\pi = 3,14$. Mezní chyba takto zaokrouhlené konstanty je menší než 0,01. Odpovídající relativní chyba,

$\frac{0,01}{3,14} = 0,003 = 0,3 \%$, je zanedbatelná vůči relativní chybě doby kmitu,

$$\frac{0,1}{2,2} = 0,05 = 5 \%.$$

Protože se jedná o případ funkční závislosti (71) s jedinou proměnnou T , bude podle vztahu (73) relativní chyba úhlové frekvence stejná jako relativní chyba doby kmitu, tj. 5 %. Absolutní chyba je tedy $5 \% \cdot \bar{\omega} = 2,9 \text{ s}^{-1} = 0,1 \text{ s}^{-1}$.

Výsledek určení úhlové frekvence:

$$\omega = (2,9 \pm 0,1) \text{ s}^{-1}.$$

Uvedená chyba odpovídá stejné hodnotě pravděpodobnosti jako chyba doby kmitu (tj. v tomto případě je to také chyba mezní).

III. Vzor 11: Postup při zpracování výsledků měření veličiny $w = f(x, y, z, \dots)$

I. Zpracování výsledků pro přímo změřené veličiny x, y, z, \dots

a. Výpočet \bar{x}, s : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$.

b) Sploučení hrubých chyb.

c) Nový výpočet \bar{x}, s .

d) Určení $s_{\bar{x}}$: $s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$

e) Porovnání chyby měřidla Δx a $s_{\bar{x}}$; možné případy:

1. $s_{\bar{x}}$ a Δx jsou srovnatelné; obě se podílejí na celkové chybě,

2. $s_{\bar{x}} \ll \Delta x$; $s_{\bar{x}}$ zanedbáme (stačí provést jen malý počet měření, třeba $N = 1$),

3. $s_{\bar{x}} \gg \Delta x$, Δx zanedbáme.

f) Volba pravděpodobnosti P a v případech e1) nebo e3) určení čísla k (s přihlédnutím k počtu měření N).

g) Určení celkové chyby (střední nebo maximální):

$$u_{\bar{x}, \text{stř}} = \sqrt{(k \cdot s_{\bar{x}})^2 + (\Delta x)^2}$$

nebo

$$u_{\bar{x}, \text{max}} = k \cdot s_{\bar{x}} + \Delta x .$$

h) Hledání a korekce systematických chyb.

i) Zaokrouhlení výsledku a zápis ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm u_{\bar{x}} .$$

j) Totéž od bodu a) pro další veličiny y, z, \dots

II. Určení výsledku pro veličinu w :

a) Výpočet střední hodnoty $\bar{w} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$.

b) Určení celkové chyby (střední nebo maximální):

$$u_{\bar{w}, \text{stř}} = \sqrt{(k \cdot s_{\bar{w}})^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 (\Delta y)^2 + \dots}$$

případně

$$u_{\bar{w}, \text{stř}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 u_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 u_{\bar{y}}^2 + \dots}$$

(použijeme-li prvního vztahu, nemusíme předem počítat celkové chyby $u_{\bar{x}}, u_{\bar{y}}, \dots$, ale místo toho vypočítáme $s_{\bar{w}}$ pomocí vztahu

$$s_{\bar{w}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 s_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}, \dots}^2 s_{\bar{y}}^2 + \dots}$$

nebo

$$u_{\bar{w}, \max} = k \cdot s_{\bar{w}} + \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots} \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots} \Delta y + \dots,$$

případně

$$u_{\bar{w}, \max} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots} u_{\bar{x}} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \dots} u_{\bar{y}} + \dots$$

- c) Hledání a korekce systematických chyb.
- d) Zokrouhlení výsledku a zápis ve tvaru

$$\bar{w} \pm u_{\bar{w}}$$

- e) Výpočet relativní celkové chyby:

$$\text{resp. } Q = \frac{u_{\bar{w}}}{\bar{w}} \cdot 100 \%.$$

5. Metody zpracování fyzikálních závislostí

5.1 Úvod

V předchozích kapitolách jsme vyšetřovali případy, kdy veličině w - ať už měřené přímo nebo nepřímo prostřednictvím veličin x, y, \dots , příslušela jediná stálá skutečná hodnota w^* (a veličinám x, y, \dots jediné stálé skutečné hodnoty x^*, y^*, \dots). Výsledkem vyhodnocení výsledků měření byla jediná, neproměnná hodnota \bar{w} jako odhad w^* (a jediné, neproměnné hodnoty \bar{x}, \bar{y}, \dots pro odhady x^*, y^*, \dots).

Nyní se budeme věnovat případu, kdy správné hodnoty w^*, x^*, y^*, \dots nejsou konstantní, ale v průběhu pokusu se mění. Přitom z celé škály možných situací vybereme jen několik základních případů.

Budeme předpokládat, že hledaná veličina w závisí na jediné proměnné veličině, kterou budeme označovat p :

$$w = f(p), \quad (86)$$

přičemž p je spojitě proměnná a f je spojitá funkce.

V praxi je často možné se setkat s případy, kdy veličina w závisí na více proměnných: $w = f(p_1, p_2, \dots)$. O zpracování naměřených hodnot fyzikálních závislostí v takovém případě je možné se dočíst např. v knize [10]. Při měřeních v základním fyzikálním praktiku však zpravidla budeme sledovat jedinou proměnnou.

Příklad 15. Měřené veličiny: proměnné a stálé

Předpoklad, že veličina w závisí na jediné proměnné veličině p nevyklučuje, že pro zjištění hodnot w nemáme kromě p měřit ještě další veličiny - např. x, y, \dots . O těch však předpokládáme, že se v průběhu pokusu nemění.

Mějme např. těleso ve tvaru kolmého kvádra o rozměrech a, b, c . Pro objem tělesa platí:

$$V = a b c.$$

Mění-li se teplota tělesa, je jeho objem funkcí

$$V = f(a, b, c, T);$$

to můžeme zapsat také jako

$$V = f(f_a(T); f_b(T); f_c(T)) = g(T),$$

kde jsme vzali v úvahu, že na teplotě závisí všechny tři rozměry tělesa: $a = f_a(T)$, atd. Chceme-li určit závislost objemu na teplotě $V = g(T)$, nestačí měřit jen teplotu, ale je potřeba měřit i rozměry a, b, c . Tyto čtyři veličiny jsou tedy všechny veličinami měřenými; během uvedeného pokusu se všechny mění a chyba v určení objemu V bude záviset na chybách v určení všech těchto veličin.

Výsledky měření proměnné veličiny $w = f(p)$ můžeme získat pomocí lineárních zapisovačů přímo jako spojitý graf. nebo ve formě tabulky dvojic hodnot (p_i, w_i) , $i = 1, \dots, n$. Zápis ve formě tabulky je zpravidla přesnější než spojitý graf, a také se běžněji používá. Proto z něj budeme dále vycházet.

Dvojice hodnot (p_i, w_i) odpovídají n diskrétním bodům grafu $w = f(p)$. Každá z hodnot p_i, w_i je zatížena chybami měření; naměřené body proto neleží přesně na tomto grafu, ale jsou kolem něho rozptýleny - v míře odpovídající chybám měření (srov. následující bod c). Každé jednotlivé hodnotě w_i i p_i přísluší střední hodnota \bar{w}_i, \bar{p}_i a celková chyba měření u_{w_i}, u_{p_i} ; způsob jejich určení jsme probrali v předchozí kapitole 4.

Z dvojic naměřených hodnot (p_i, w_i) chceme dojít ke zjištění závislosti $w = f(p)$. Mohou přitom nastat tyto situace:

- Potřebujeme najít další dvojice hodnot (p_i, w_i) ; pokud je nemůžeme získat experimentálně, nazývá se hledání pomocí nějaké vyhodnocovací metody. Leží-li w_i i p_i uvnitř intervalů změřených hodnot, provedeme tzv. interpolaci; leží-li mimo ně, použijeme tzv. extrapolaci.
- Neznáme teoretickou předpověď závislosti $w^{\text{te}} = f(p^{\text{te}})$; chceme zjistit, jaký vztah by ji nejlépe popsal. Můžeme se v tom případě pokusit proložit naměřenými body polynomem.

c) Známe správnou závislost $w^* = f(p^*)$ - např. to může být závislost lineární, exponenciální aj. Protože však jsou naměřené body (p_1, w_1) zatíženy chybami, nevíme, jak jimi odpovídající křivku - např. přímkou, exponenciálu aj. proložit. Jinými slovy, chceme zjistit, jakých hodnot nabývají parametry dané křivky. Pro takové zpracování výsledků je často výhodná metoda nejmenších čtverců, skupinová metoda nebo metoda postupných měření.

Metody zpracování výsledků měření zmíněné v předchozích bodech jsou početní. Používají se ovšem i metody grafické. Jejich výhodou je, že jsou názornější a obvykle i rychlejší; jsou však méně přesné. S rostoucím využitím počítačů význam grafických metod klesá. Obvykle je výhodné při zpracování výsledků měření kombinovat početní metody s grafickými.

V následujících odstavcích se s některými z těchto metod seznámíme. Dříve však bude ještě užitečné upozornit na možnost vyjádření funkce pomocí polynomu a na podstatný rozdíl mezi matematickým a fyzikálním významem nějaké funkční závislosti, např. typu $w = f(p)$.

Z matematického hlediska jde o předpis, kterým jsou číselným hodnotám proměnné p přiřazeny číselné hodnoty w . Pro každou dostatečně "rozumnou" funkci - a v experimentech se setkáváme zpravidla s takovými funkcemi - platí Weierstrassova věta¹⁹⁾, podle které lze průběh takovéto funkce s libovolnou předem zadanou přesností aproximovat polynomem

$$w = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n, \quad (87)$$

kde n je celé nezáporné číslo. To znamená, že pokud nám jde jen o matematickou, ryze číselnou shodu naměřených dat s funkčním zápisem, pak ke každé předem požadované přesnosti shody, (tj. velikosti přípustných odchylek) lze vždy najít takový polynom typu (87), který je adekvátní skutečné závislosti $w = f(p)$. Z fyzikálního hlediska klademe na tvar funkční závislosti širší nároky: nejde nám jen o číselnou shodu, ale také o to, aby v rámci dané modelové představy vystihovala fyzikální příčiny, které k ní vedou. Nechť podle fyzikálního modelu má např. platit

$$w = \sin p, \quad (88)$$

kde úhel p je udán v radiánech. Funkci $\sin p$ můžeme podle Taylorova vzorce²⁰⁾ vyjádřit s libovolnou předem zadanou přesností vztahem

$$\sin p = p - \frac{p^3}{6} + \frac{1}{120} p^5 - \dots + (-1)^{m-1} \frac{p^{2m-1}}{(2m-1)!}, \quad (89)$$

kde m je přirozené číslo.

To je možné přepsat ve tvaru

$$w = a p + b p^3 + c p^5 + \dots + z p^{(2m-1)} \quad (90)$$

¹⁹⁾ Viz např. [7], díl II, s. 347

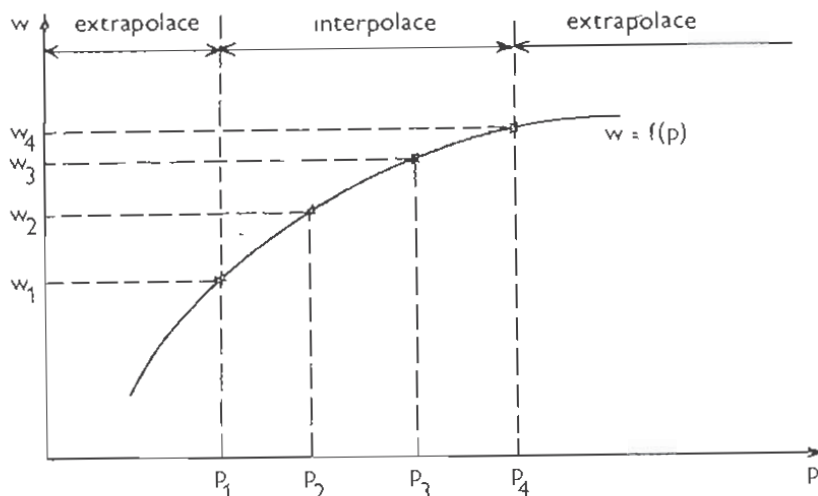
²⁰⁾ Viz např. [7], díl I, s. 332

Zatímco jsou číselné hodnoty w podle vztahů (88) a (90) s libovolnou přesností stejné, není fyzikální skutečnost - že jde právě o funkci sinus - v zápisu (90) patrná.

5.2 Interpolace a extrapolace

Předpokládejme, že máme zadánu řadu dvojic hodnot (p_i, w_i) , $i = 1, \dots, n$, které je možné považovat za přesné, nezátížené chybami - např. je možné jejich chyby vzhledem k vyžadované přesnosti zanedbat.

Chceme zjistit hodnotu w pro nějaké p takové, že $p \neq p_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Je-li $p \in \langle p_1, p_n \rangle$, jedná se o interpolaci. Leží-li p vně tohoto intervalu, pak se jedná o extrapolaci (obr. 17).



Obr. 17. Extrapolace a interpolace

Známe-li předem tvar funkce $w = f(p)$ a není-li počet n zadaných dvojic hodnot (p_i, w_i) nižší než počet neurčených koeficientů této funkce, můžeme koeficienty jednoznačně určit řešením soustavy k rovnic (kde k je počet koeficientů).²¹⁾ Hodnoty w je pak možné vypočítat pro libovolné p .

Příklad 16. Interpolace a extrapolace při známém tvaru funkční závislosti

Závislost tlaku plynu p na teplotě t při konstantním objemu je v určitém rozmezí teplot a při zadané přesnosti lineární a je dána vztahem

$$p = p_0 (1 + \gamma(t - t_0)),$$

kde p_0 a t_0 jsou hodnoty odpovídající nějakému počátečnímu stavu plynu a γ je součinitele teplotní rozpínivosti.

Předpokládejme, že jsme při měření - např. pomocí plynového teploměru²²⁾ -

21) Různé metody řešení viz [5], s. 268 a s. 450

22) Viz např. [2], s. 42-44 a [3], s. 189 a s. 204

- zjistili při teplotě $t_1 = 20^\circ\text{C}$ tlak $p_1 = 101 \text{ kPa}$ a při teplotě $t_2 = 80^\circ\text{C}$ tlak $p_2 = 123 \text{ kPa}$.

Chceme určit tlak p_3 odpovídající teplotě $t_3 = 0^\circ\text{C}$ a tlak p_4 odpovídající střední hodnotě teploty v měřeném intervalu, tj. $t_4 = 50^\circ\text{C}$. V prvním případě se jedná o extrapolaci, v druhém o interpolaci.

Funkční závislost $p = p(t)$ známe; upravíme ji na tvar $p = a + b t$:

$$p = p_0 - p_0 \gamma t_0 + p_0 \gamma t.$$

tj. $a = p_0 (1 - \gamma t_0)$; $b = p_0 \gamma$. Tyto koeficienty (směrnici přímky a úsek, který vytíná na svislé ose) určíme dosazením naměřených dvojic hodnot do vztahu $p = a + b t$ a řešením vzniklé soustavy dvou lineárních rovnic:²³⁾

$$101 \cdot 10^3 = a + b \cdot 20$$

$$123 \cdot 10^3 = a + b \cdot 80$$

$$a = 93,7 \text{ kPa}$$

$$b = 0,367 \text{ kPa} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Funkční závislost $p = p(t)$ má tedy konkrétní tvar

$$p = 93,7 \text{ kPa} + (0,367 \text{ kPa} \cdot \text{K}^{-1}) t.$$

Extrapolace a interpolace: dosadíme postupně $t_3 = 0^\circ\text{C}$ a $t_4 = 50^\circ\text{C}$ do posledního vztahu a vypočteme p_3 a p_4 :

$$p_3 = (93,7 + 0,367 \cdot 0) \text{ kPa} = 93,7 \text{ kPa}$$

$$a \quad p_4 = (93,7 + 0,367 \cdot 50) \text{ kPa} = 112,1 \text{ kPa}.$$

Neznáme-li předem tvar funkce $w = f(p)$, proložíme n naměřenými body polynomem typu (87). Může být nejvýše stupně $n-1$, protože pro určení jeho koeficientů můžeme sestavit nejvýše n rovnic. Volba stupně polynomu vyplývá zpravidla z kompromisu mezi dvěma protichůdnými požadavky: na jedné straně požadavkem přesnosti, která roste s rostoucím stupněm polynomu, na druhé straně požadavku jednoduchosti. Pokud je to z hlediska přesnosti přípustné nahra-
zujeme skutečnou závislost v určitých dílčích intervalech nezávisle proměnné p po částech polynomem prvního, druhého, nejvýše třetího stupně. Přitom při interpolaci volíme dílčí intervaly p symetricky vůči vyšetřované hodnotě.²⁴⁾

Probereme si nyní zvláštní případ, kdy naměřené hodnoty p_i jsou rozmístěny ekvidistantně, tj. kdy platí:

$$p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = \dots = p_n - p_{n-1} \dots \quad (91)$$

Zavedeme novou proměnnou Δ vztahem

$$\Delta = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \quad (92)$$

23) Píšeme rovnice jen pro číselné hodnoty, jednotky pro lepší přehlednost vynecháme; podobně i v následujících odstavcích.

24) Obecně se lze o interpolačních metodách dočíst např. v [5], s. 497

a budeme hledat koeficienty a, b, c ... výrazu

$$w = a + b \cdot \Delta + c \cdot \Delta (\Delta - 1) + d \cdot \Delta (\Delta - 1) \cdot (\Delta - 2) + \dots \quad (93)$$

tak, aby $w = w_1$ pro $p = p_1$, $w = w_2$ pro $p = p_2$, atd. Pro tyto koeficienty platí jednoduché vztahy

$$\begin{aligned} a &= w_1 \\ b &= w_2 - w_1 \\ c &= \frac{1}{2} (w_3 - 2w_2 + w_1) \\ d &= \frac{1}{6} (w_4 - 3w_3 + 3w_2 - w_1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (94)$$

Můžeme se o tom snadno přesvědčit, uvědomíme-li si, že pro $p = p_1$ je $\Delta = 0$, pro $p = p_2$: $\Delta = 1$; pro $p = p_3$: $\Delta = 2$ atd. Z n naměřených bodů lze určit n koeficientů a, b, c, ...

Vztah (93) můžeme použít k určení hodnot veličiny w pro hodnoty proměnné p , ležící mimo změřené body p_1, \dots, p_n . Se zvyšujícím počtem sčítanců, které při výpočtu vezmeme v úvahu, se zvyšuje přesnost vypočtené hodnoty w .

Příklad 17. Interpolace při neznámém tvaru funkční závislosti

Mějme trojici naměřených bodů (p_i, w_i) , $i = 1, 2, 3$, tak jak jsou udány v následující tabulce 15.

Tabulka 15. Naměřené hodnoty veličin p_i, w_i

Por.č. veličina	1	2	3
p	30	70	110
w	0,50	0,94	0,94

Určete hodnotu w pro $p = 90$ v těchto případech:

1. v nultém přiblížení, tj. $w = a$, z bodu 1, z bodu 2 a z bodu 3;
2. v prvním přiblížení, tj. $w = a + b \cdot \Delta$, z dvojice bodů 1 a 2, 1 a 3, 2 a 3;
3. ve druhém (v tomto případě posledním možném) přiblížení tj. $w = a + b \cdot \Delta + c \cdot \Delta (\Delta - 1)$, ze zadané trojice bodů.

Výsledky: a) 1. 0,50; 0,94; 0,94
2. 1,16; 0,83; 0,94
3. 0,995 .

Např. v posledním případě jsme postupovali takto:

Pomocí (94) jsme určili koeficienty a, b, c:

$$\begin{aligned} a &= w_1 = 0,50 \\ b &= w_2 - w_1 = 0,44 \\ c &= \frac{1}{2} (w_3 - 2w_2 + w_1) = -0,22 \end{aligned}$$

Polynom (93) má tedy tvar

$$w = 0,50 + 0,44 \cdot \Delta - 0,22 \cdot \Delta (\Delta - 1)$$

a po dosazení za Δ ze vztahu (92)

$$w = 0,50 + 0,44 \cdot \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} - 0,22 \cdot \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} - 1 \right);$$

přítom $p_1 = 30$ a $p_2 - p_1 = 40$. Odtud už můžeme vypočítat hledanou hodnotu w pro $p = 90$: $w = 0,995$.

Jaký je skutečný tvar funkce $w = f(p)$ a skutečná hodnota w pro $p = 90$? Odpověď najdete na konci odst. 5.6, příklad 21.

5.3 Prokládání polynomu nepřesně určenými body

Předpokládejme nyní, že neznáme teoretický tvar závislosti $w = f(p)$. Nahradíme ji proto polynomem (87) stupně n a budeme určovat hodnoty jeho koeficientů. Předpokládejme dále, že hodnoty w_i jsou zatíženy náhodnými chybami; hodnoty p_i budeme i dále považovat za přesné. Na rozdíl od extrapolace a interpolace, kdy jsme všechny zadané hodnoty považovali za přesné, je při nepřesně určených bodech ke statistickému vyhodnocení nezbytné mít několikrát větší počet naměřených bodů, než je počet určovaných koeficientů.

Stupeň polynomu můžeme určit buď z požadavku určité, předem zadané přesnosti aproximace, nebo ho můžeme odhadnout přímo z naměřených hodnot. Druhý z obou způsobů si ukážeme na následujícím příkladě.

Mějme následující funkční závislost mezi w a p :

$$w = a + bp + cp^2 \quad (95)$$

Pak platí

$$\frac{d w}{d p} = b + 2cp, \quad \frac{d^2 w}{d p^2} = 2c, \quad \frac{d^3 w}{d p^3} = 0.$$

Obecně pro polynom n -tého stupně platí, že

$$\frac{d^{(n+1)} w}{d p^{(n+1)}} = 0. \quad (96)$$

Nechť je konkrétně

$$w = 1 + 2p + 3p^2. \quad (97)$$

Pro $p = 1, 2, 3, 4, 5$ vypočítáme hodnoty w a místo hodnot prvních, druhých, atd. derivací máme hodnoty tzv. prvních, druhých atd. diferencí $\Delta^{(k)} w$, které představují odhad hodnot $\frac{d^{(k)} w}{d p^{(k)}}$; diference nám umožní odhadnout hodnoty derivací z naměřených hodnot, bez znalosti konkrétního vyjádření polynomu.

Diference určíme podle vztahů

$$\Delta^{(1)} w_i = \frac{w_{i+1} - w_i}{p_{i+1} - p_i}, \quad i = 1, \dots, 5; \quad (98a)$$

$$\Delta^{(2)} w_i = \Delta^{(1)} w_{i+1} - \Delta^{(1)} w_i, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (98b)$$

Postup při výpočtu diferencí je vidět z následující tabulky, v níž pro uvedená p byly hodnoty w vypočteny z rovnice (97).

Tabulka 16. Výpočet diferencí pro teoretické hodnoty w_i .

p	w	(1) Δw	(2) Δw	(3) Δw	(4) Δw
1	6				
2	17				
3	34				
4	57				
5	86				
$\bar{z}^{(k)}$	40	20	6	0	0

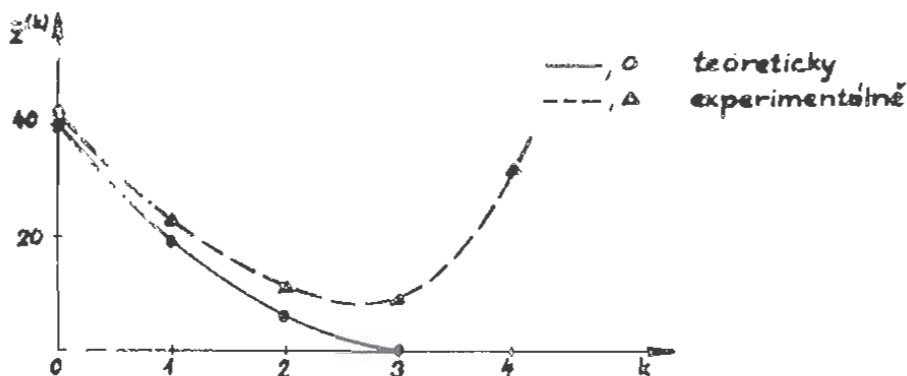
V tabulce jsme označili $\bar{z}^{(k)}$ aritmetický průměr hodnot $\Delta^{(k)} w_i$ (formálně můžeme považovat w_i za $\Delta^{(0)} w_i$). Z toho, že hodnota $\bar{z}^{(3)}$, která je aritmetickým průměrem odhadů třetí derivace, je rovna nule usoudíme, že hodnoty w jsou dány polynomen druhého stupně v proměnné p .

Kdybychom hodnoty w měřili, byly by zatíženy chybami. Soubor takových experimentálních hodnot w_i^E je uveden v tabulce 17. Vypočítáme z nich difference $\Delta^{(k)} w_i^E$.

Tabulka 17. Výpočet diferencí pro experimentální hodnoty w_i^E .

p	w^E	(1) Δw^E	(2) Δw^E	(3) Δw^E	(4) Δw^E
1	6,5				
2	14,5				
3	33,1				
4	53,4				
5	100,0				
$\bar{z}^{(k)}$	6,6	2,6	13,1	8,3	34,3

Pro srovnání s hodnoty $\bar{z}^{(k)}$ určené z hodnot teoretických a experimentálních do jednoho grafu pro názornost jimi proložíme křivky (obr. 18.).



obr. 18. Průběh aritmetických průměrů diferencí pro teoretické a experimentální hodnoty veličiny

Obě křivky mají minimum pro $k = 3$; i z experimentálních hodnot bychom tedy odhadli, že stupeň polynomu je roven $k-1 = 2$.

Všimněme si, že pro experimentální údaje je $\bar{z}(4) > \bar{z}(3)$; je to způsobeno tím, že hodnoty w_1^k jsou zatíženy chybami a při výpočtu vyšších diferencí chyba výsledku roste - viz rovnici (70), Čím vyšší diference, tím větší je chyba; to je stejně důležité zjištění jako to, že chyba roste s rostoucí mocninou měřené veličiny. Vzhledem k této skutečnosti se může stát, že minimum $\bar{z}^{(k)}$ určené z experimentálních hodnot bude nalezeno pro nižší k než v případě teoretickém, a že tedy takto určený stupeň polynomu ($k-1$) bude nižší, než odpovídá skutečnosti.

Jakmile určíme stupeň polynomu, ať již z úvah o přesnosti nebo například výše uvedeným způsobem z experimentálních údajů, pak z matematického hlediska již známe var funkční závislosti $y = f(x)$ a hledané koeficienty můžeme určit např. skupinovou metodou nebo metodou nejmenších čtverců, s nimiž se seznámíme v následujících dvou odstavcích.

5.4 Skupinová metoda

Je-li funkce $w = f(p)$ aproximována polynomem k -tého stupně

$$w = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k, \quad (99)$$

je třeba určit $(k+1)$ koeficientů a_0, a_1, \dots, a_k .

Kdybychom měli k dispozici přesné údaje, stačilo by k tomu $(k+1)$ vzájemně nezávislých rovnic, tj. $(k+1)$ naměřených dvojic hodnot (p_1, w_1) .

Protože však jsou naměřené hodnoty w_1 zatíženy chybami, a také proto, že musíme naměřené hodnoty statisticky zpracovat, potřebujeme dvojice (p_1, w_1) větší počet. Předpokládejme, že jich máme k dispozici n , kde $n > k$; pomocí nich můžeme sestavit n rovnic.

Těchto n rovnic rozdělíme, zpravidla rovnoměrně, do $(k+1)$ skupin a v každé z těchto skupin rovnice sečteme.²⁵⁾ Tak dostaneme $(k+1)$ nových rovnic,

²⁵⁾ Protože hodnoty p_1 pokládáme za přesné a chyby w_1 za náhodné, můžeme očekávat, že část chyb se při tomto sčítání vyruší - srov. úvahy na vztahem (31).

z nichž určíme hodnoty $(k+1)$ koeficientů.

Příklad 18. Určení stupně polynomu a jeho koeficientů

Předpokládejme, že jsme změřili čtyři dvojice hodnot (p_i, w_i^E) a že hodnoty p_i můžeme považovat za přesné. Hodnoty w_i^E jsou zatíženy měřidelnými chybami.

Chceme aproximovat vztah mezi w a p pomocí polynomu (99); máme pro to k dispozici $n = 4$ měření. Určení stupně polynomu pomocí postupu ukazaného v předchozím odstavci je zachyceno v následující tabulce:

Tabulka 18. Určení stupně polynomu

Skupina	Číslo měření	p	w^E	$\Delta^{(1)} w^E$	$\Delta^{(2)} w^E$	$\Delta^{(3)} w^E$
I	1	0	21	-1	4	-8
	2	1	20			
II	3	2	23	+3	-4	
	4	3	22	-1		
	$\bar{z}^{(k)}$		21,5	0,3	0,0	0,0

Minimální hodnotu má $\bar{z}^{(2)}$; z toho určíme stupeň polynomu $k = 1$;

$$w = a + bp.$$

Je tedy potřeba určit dva koeficienty. Měření rozdělíme na dvě skupiny (I a II, tab. 18), dosadíme hodnoty w a p do uvedeného polynomu a rovnice v jednotlivých skupinách sečteme:

I. skupina	21 = a	II. skupina	23 = a + 2b
	<u>20 = a + b</u>		<u>22 = a + 3b</u>
	41 = 2a + b		45 = 2a + 5b

Ze součtových rovnic určíme a a b a dostaneme jako výsledek:

$$a = 20, \quad b = 1.$$

Hledaný polynom má tedy tvar

$$w = 20 + p.$$

Všimněme si ještě, jak se sčítáním rovnic vyrušily chyby měření, tj. odchylky naměřených hodnot w^E od hodnot teoretických w^T . Ukazuje to následující tabulka 19. Teoretické hodnoty jsou vypočteny ze zjištěného polynomu.²⁶⁾ Odchylky naměřených hodnot w^E od teoretických hodnot w^T se

²⁶⁾ Teoretické hodnoty w^T nejsou ovšem hodnotami skutečnými, w^T . Jsou to střední hodnoty určené ze vztahu získaného na základě naměřených hodnot s určitou přesností. Skutečné hodnoty w^E neznáme, protože neznáme "přesný", skutečný tvar funkce $w = f(p)$.

ovšem nemusí vždy vyrušit úplně.

Tabulka 19. Vyrušení chyb měření při skupinové metodě

Skupina	Číslo měření	p	w^E	w^T	chyba měření	Součet ohyb ve skupině
I	1	0	21	20	+1	0
	2	1	20	21	-1	
II	3	2	23	22	+1	0
	4	3	22	23	-1	

Všimněme si nyní zajímavé skutečnosti. První diference experimentálních hodnot $\Delta^{(1)}w^E$ v příkladu 18 představují odhady první derivace zkoumané závislosti. Očekávali bychom tedy, že jejich aritmetický průměr (= 0,3) bude dobrým odhadem hodnoty koeficientu b (= 1); ale zřejmě tomu tak není. Důvod vyplyne z následujícího podrobnějšího rozboru.

Vyjdeme ze vztahu (98a). Aritmetický průměr prvních diferencí $\bar{z}^{(1)}$ je roven

$$\bar{z}^{(1)} = \frac{\Delta^{(1)}w_1^E + \Delta^{(1)}w_2^E + \Delta^{(1)}w_3^E}{3}.$$

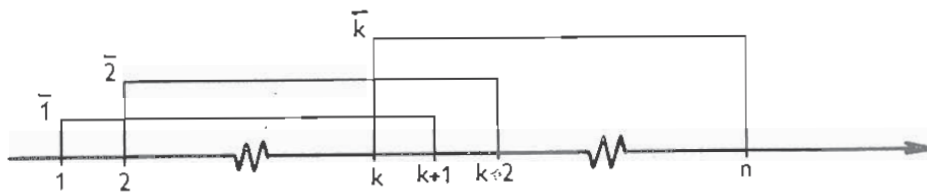
Protože rozdíly $x_{i+1} - x_i$ byly pro všechna $i = 1, 2, 3$ stejné a rovné 1, můžeme tento vztah dále upravit:

$$\bar{z}^{(1)} = \frac{(w_2^E - w_1^E) + (w_3^E - w_2^E) + (w_4^E - w_3^E)}{3} = \frac{w_4^E - w_1^E}{3}.$$

Aritmetický průměr prvních diferencí $\bar{z}^{(1)}$ je tedy určen jen pomocí první a poslední hodnoty w^E - aniž by bylo využito další informace obsažené ve změřených hodnotách ležících mezi nimi, tj. ve w_2^E a w_3^E . Tak tomu bude ve všech případech při tzv. postupných měřeních. Postupná měření na sebe těsně navazují a koncový bod jednoho měření je počátečním bodem dalšího; přitom hodnoty proměnné p jsou ekvidistantní. Metoda vhodná pro zpracování postupných měření je popsána v následujícím odstavci.

5.5 Metoda postupných měření

Předpokládejme, že hodnoty nezávisle proměnné jsou ekvidistantní, interval mezi nimi je jednotkový a celkový počet měření je n , kde n je sudé číslo. Měření rozdělíme na dvě stejně velké části po $k = \frac{n}{2}$ měřeních (obr.19).



Obr. 19. Výpočet diferencí naměřených hodnot při metodě postupných měření.

Způsobem znázorněným na obr. 19 vypočítáme první diference $\Delta^{(1)}_{w_j}$ mezi hodnotami z obou částí měření takto:

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}_{w_1} &= \frac{1}{k} (w_{k+1} - w_1) \\ \Delta^{(1)}_{w_2} &= \frac{1}{k} (w_{k+2} - w_2)\end{aligned}\quad (100)$$

$$\Delta^{(1)}_{w_k} = \frac{1}{k} (w_n - w_k).$$

Vypočítané hodnoty $\Delta^{(1)}_{w_j}$ pokládáme za nezávislá měření, pro která běžným způsobem určujeme aritmetický průměr, rozptyl, směrodatnou odchylku atd. Takto získaný aritmetický průměr teprve považujeme za odhad správné hodnoty první derivace.

Pro aritmetický průměr $\overline{\Delta^{(1)}_w}$ takových prvních diferencí dostaneme s pomocí (100) vztah

$$\overline{\Delta^{(1)}_w} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Delta^{(1)}_{w_j} = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=k+1}^n w_i - \sum_{i=1}^k w_i \right). \quad (101)$$

Příklad 19. Použití metody postupných měření pro odhad derivace

Vraťme se k číselným hodnotám v předchozím příkladu 18. Určíme nyní koeficient b , tj. směrnici přímky $w = a + bp$, metodou postupných měření; $n = 4$, $k = 2$.

$$\overline{\Delta^{(1)}_w} = \frac{1}{2^2} (23 + 22) - (21 + 20) = 1.$$

Hodnotu koeficientu $b (=1)$ jsme tedy postupnou metodou odhadli lépe než původním způsobem ($= 0,3$).²⁷⁾

5.6 Metoda nejmenších čtverců

Předpokládejme, že máme n dvojic naměřených hodnot (p_i, w_i) , z nichž p_i považujeme za přesné a u w_i uvažujeme náhodné chyby měření, a že známe teoretický tvar závislosti $w = f(p)$. Chceme "co nejlépe" určit hodnoty neznámých koeficientů této funkce, resp. "co nejlépe" proložit křivku znázorněného typu naměřenými hodnotami.

²⁷⁾ Další příklad použití metody postupných měření najdete v [3], s. 54-55

Za nejlepší zpravidla pokládáme takové proložení, kdy součet čtverců odchylek proložené křivky od naměřených bodů je minimální:

$$\sum_{i=1}^n (f(p_i) - w_i)^2 = \min. \quad (102)$$

Vrátíme-li se ke vztahu (36), vidíme, že se pak proložená křivka chová obdobně jako aritmetický průměr. Tento postup proložení křivky naměřenými body je tzv. metoda nejmenších čtverců.

Prokládání funkce naměřenými body se nazývá regrese. Proložená funkce je regresní funkce a její graf regresní křivka.

Ukážeme si použití metody nejmenších čtverců na dvou jednoduchých případech lineární regresní funkce:

$$1. w = b p \quad (103)$$

(regresní přímka prochází počátkem);

$$2. w = a + b p, a \neq 0 \quad (104)$$

(regresní přímka neprochází počátkem).

1. Hledáme takové hodnoty koeficientu b regresní funkce (103), pro něž je minimální výraz (102), který označíme S:

$$S = \sum_{i=1}^n (b p_i - w_i)^2. \quad (105)$$

Výraz S můžeme považovat za funkci jedné proměnné $S = S(b)$. Naším úkolem je najít takový bod b^x , v němž bude mít funkce S minimum. Předem můžeme odhadnout, že - vzhledem k tomu, že body hledané regresní přímky se chovají jako aritmetický průměr - bude funkce S mít jediný extrém, a to právě minimum.

K tomu, aby funkce S měla v nějakém bodě minimum, musí být splněny dvě podmínky pro první a druhou derivaci v tomto bodě:

$$\frac{dS}{db} = 0 \quad (106)$$

$$a \quad \frac{d^2S}{db^2} > 0. \quad (107)$$

Pro výpočet derivací vztah S podle (105) nejprve upravíme:

$$S = \sum_{i=1}^n (b^2 p_i^2 - 2b p_i w_i + w_i^2) \quad (108)$$

Vypočteme a postupně upravíme prvou derivaci $\frac{dS}{db}$:

$$\frac{dS}{db} = \sum_{i=1}^n (2b p_i^2 - 2p_i w_i) = 2 \sum_{i=1}^n (b p_i^2 - p_i w_i) = 2b \sum_{i=1}^n p_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n p_i w_i$$

Dosazením do podmínky (106) dostaneme lineární rovnici pro neznámou b:

$$b \sum_{i=1}^n p_i^2 - \sum_{i=1}^n p_i w_i = 0, \quad (109)$$

jejímž kořenem je

$$b^x = \frac{\sum_{i=1}^n p_i w_i}{\sum_{i=1}^n p_i^2}. \quad (110)$$

Splnění druhé podmínky (107) pro bod b^x je jednoduché ověřit:

$$\frac{d^2 S}{db^2} = 2 \sum_{i=1}^n p_i^2 > 0$$

Funkce $S = S(b)$ má tedy jediný extrém, a to minimum, v bodě b^x . Tento bod je hledaným parametrem regresní funkce (103):

$$w = b^x p \quad (111)$$

Parametr b^x byl určen z naměřených bodů, které jsou zatíženy chybami. Je proto třeba udat chybu i pro něj. Jsou-li hodnoty w_i zatíženy jen náhodnými chybami a přísluší-li jim stejná směrodatná odchylka s^{28} , dá se ukázat, že pro ni platí vztah

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (b^x p_i - w_i)^2 \quad (112)$$

nebo, po úpravě s využitím vztahu (110)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n w_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i w_i^2}{\sum_{i=1}^n p_i^2}. \quad (113)$$

Směrodatná odchylka parametru b^x je pak dána výrazem:

$$s_b = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2}}. \quad (114)$$

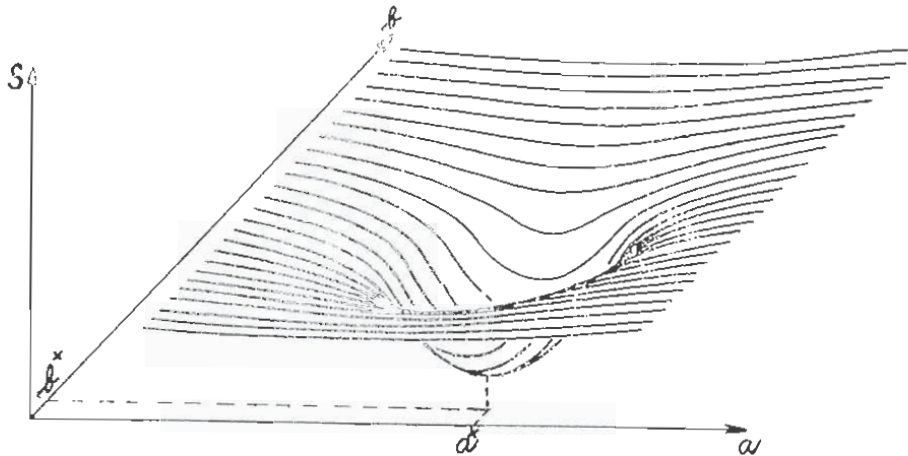
2. Podobně budeme postupovat při prokládání regresní přímky, která neprochází počátkem. V tomto případě hledáme dva parametry a^x , b^x regresní funkce (104). Úloha je nyní složitější, protože výraz (102), který opět označíme S ,

$$S = \sum_{i=1}^n (a + b p_i - w_i)^2 \quad (115)$$

je vlastně funkcí dvou proměnných: $S = S(a, b)$. Pro lepší představu si vřimne-

²⁸⁾ Jedná se o směrodatnou odchylku ne jednoho měření, ale aritmetického průměru; pro lepší přehlednost je vynechán index u s .

me obr. 20, na něž je znázorněn graf této funkce. Jedná se o plochu v tří-rozměrném prostoru. Očekáváme, opět vzhledem k tomu, že body této plochy se chovají obdobně jako aritmetický průměr, že tato plocha bude mít jediný extrém, a to minimum. Na obr. 20 je to znázorněno průhybem plochy S v jediném bodě (a^x, b^x) .



Obr. 20. Hledání minima plochy $S = S(a, b)$

Podmínky pro existenci minima funkce dvou proměnných budou nyní vyjádřeny pomocí prvních a druhých parciálních derivací.

Funkce $S = S(a, b)$ může nabývat lokálního extrému jen v takovém bodě, pro který platí:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad (116a)$$

a

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad (116b)$$

Aby v tomto bodě bylo ostré lokální minimum, musí druhé parciální derivace pro tento bod splňovat ještě dvě další podmínky:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right)^2 > 0 \quad (117a)$$

a

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0 \quad (117b)$$

Pro výpočet parciálních derivací upravíme výraz (115) do tvaru

$$S = \sum_{i=1}^n (a + bp_i - w_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a^2 + 2abp_i + b^2p_i^2 + 2bp_iw_i + w_i^2 - 2aw_i).$$

Pro první parciální derivace dostaneme:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (2a + 2bp_i - 2w_i) = 2na + 2b \sum_{i=1}^n p_i - 2 \sum_{i=1}^n w_i \quad (118a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n (2a p_i + 2b p_i^2 + 2p_i w_i) = 2a \sum_{i=1}^n p_i + 2b \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n p_i w_i. \quad (118b)$$

Hledáme takové hodnoty a^x , b^x , pro něž jsou tyto první parciální derivace nulové; řešíme tedy pro neznámé a , b soustavu dvou lineárních rovnic

$$na + b \sum p_i - \sum w_i = 0 \quad (119a)$$

$$a \sum p_i + b \sum p_i^2 + \sum p_i w_i = 0 \quad (119b)$$

Kořeny této soustavy jsou

$$a^x = \frac{1}{D} (\sum p_i^2 \sum w_i - \sum p_i \sum p_i w_i) \quad (120)$$

$$b^x = \frac{1}{D} (n \sum p_i w_i - \sum p_i \sum w_i), \quad (121)$$

kde jsme označili

$$D = n \sum p_i^2 - (\sum p_i)^2. \quad (122)$$

Ověřování podmínek (117a,b) nebudeme provádět, protože by to vyžadovalo u (117b) delší důkaz. Zůstaneme u názorné představy, že funkce $S = S(a,b)$ musí mít jediný extrém, a to minimum, protože body nalezené regresní přímky mají vlastnosti aritmetického průměru.

Hodnoty a^x , b^x jsou tedy parametry lineární regresní funkce (104):

$$w = a^x + b^x p. \quad (123)$$

Přísluší-li všem hodnotám w_i stejná směrodatná odchylka s , platí pro ni vztah

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (a^x + b^x p_i - w_i)^2. \quad (124)$$

Chybu samozřejmě musíme opět udat i pro parametry regresní přímky. Pro jejich směrodatné odchylky platí vztahy:

$$s_a = s \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i^2}{D}} \quad (125)$$

a

$$s_b = s \sqrt{\frac{n}{D}}, \quad (126)$$

kde D je opět výraz (122).

V probraných dvou případech jsme prováděli lineární regresi; hledali jsme parametry lineární regresní funkce, prokládali jsme regresní přímku naměřenými body. Podobně je možné provádět regresi kvadratickou, hyperbolickou, polynomičnou apod. Není-li však závislost $w = f(p)$ lineární, je použití metody nejmenších čtverců složitější.

Řadu závislostí lze však převést na lineární buď vhodnou úpravou nebo zavedením nových proměnných. Např.:

- pro $w = Ce^{kp}$, kde C a k jsou konstanty, dostaneme

$$\ln w = \ln C + k p,$$

neboli

$$W = A + k p,$$

kde jsme označili $W = \ln w$ a $A = \ln C$;

- pro $w = Cp^m$, kde C a m jsou konstanty, dostaneme

$$\ln w = \ln C + m \cdot \ln p,$$

neboli

$$W = A + m P,$$

kde je opět $W = \ln w$, $A = \ln C$ a $P = \ln p$;

- pro $\sin w = a + \frac{b}{p}$, kde a a b jsou konstanty, dostaneme

$$W = a + bP,$$

kde $W = \sin w$ a $P = \frac{1}{p}$.

Při těchto transformacích je však potřeba postupovat opatrně a uvědomit si např., že funkce $\ln z$ je definována jen pro $z > 0$ apod.

Příklad 20. Proložení přímky naměřenými body metodou nejmenších čtverců

Vraťme se k měření popsanému v příkladu 16, při němž se pomocí plynového teploměru zjišťuje závislost tlaku plynu na teplotě při konstantním objemu. Předpokládejme, že jsme naměřili hodnoty uvedené v následující tabulce 20.

Tabulka 20. Závislost tlaku plynu p na teplotě t při konstantním objemu

Pořadové číslo měření	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{t}{^\circ\text{C}}$	20	30	40	50	60	70	80
$\frac{p}{\text{kPa}}$	101	104	109	112	115	120	123

Teoretický vztah $p = p(t)$ má tvar

$$p = p_0 (1 + \gamma(t - t_0));$$

symboly veličin známe z příkladu 16. Je to vlastně rovnice přímky

$$p = a + b t,$$

kde $a = p_0 (1 - \gamma t_0)$ a $b = p_0 \gamma$.

Chceme tyto parametry najít z naměřených hodnot, neboli proložit naměřenými body přímkou.

V našem případě odpovídá veličině p ze vztahů (120) - (125) teplota t , proměnné w , tlak p . Je výhodné předem provést částečné výpočty ($i = 1, \dots, 7$):²⁹⁾

²⁹⁾ Uvádíme opět jen číselné hodnoty veličin.

$$\sum t_i = 20 + 30 + \dots + 80 = 350$$

$$\sum t_i^2 = 400 + 900 + \dots + 6400 = 20300$$

$$(\sum t_i)^2 = 122500$$

$$\sum p_i = 101 + 104 + \dots + 123 = 784$$

$$\sum t_i p_i = 20 \cdot 101 + 30 \cdot 104 + \dots + 80 \cdot 123 = 40240$$

Podle (122) určíme napřed ještě D:

$$D = 7 \cdot 20300 - 122500 = 19600$$

Pomocí (120) a (121) můžeme už vypočítat parametry prokládané přímky:

$$a^x = \frac{1}{19600} (20300 \cdot 784 - 350 \cdot 40240) = 93,4$$

$$b^x = \frac{1}{19600} (7 \cdot 40240 - 350 \cdot 784) = 0,371$$

Regresní přímka má tedy tvar

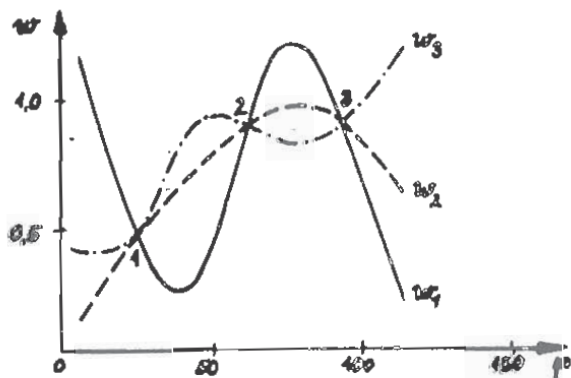
$$p = 93,4 \text{ kPa} + (0,371 \text{ kPa} \cdot \text{K}^{-1})t .$$

Porovnejte tento výsledek s výsledkem, který jsme při interpolaci a extrapolaci dostali v příkladu 16. Jsou odlišné?

Při zpracování těchto naměřených hodnot by bylo potřeba určit ještě chyby měření. Směrodatné odchylky bychom vypočítali pomocí vztahů (124), (125) a (126). Pokud by chyba měření teploty nebyla zanedbatelná, bylo by nutné vzít ji také v úvahu v celkových chybách měření (spolu s chybou měřidla při odečítání tlaku).

Příklad 21. Odpověď k příkladu 17

Existuje nekonečný počet takových "rozumných" funkcí, které právě procházejí body 1, 2, 3. Na obr. 21 jsou uvedeny tři z nich.



Obr. 21. Hledání funkce procházející třemi naměřenými body

Není tedy možné jen na základě zadaných hodnot určit, která je správná. Hodnoty uvedené v příkladu byly vypočítány ze vztahu $w = \sin p$ pro p udané ve stupních zaokrouhlením na tři platná místa; tomu odpovídá pro $p = 90$ hodnota $w = 1,00$.

5.7 Grafické znázornění fyzikální závislosti

Výsledky měření fyzikální závislosti $w = f(p)$ můžeme vyjádřit nejen početně, ale také graficky. Grafické znázornění poskytuje názornější představu o výsledku měření než matematický vztah získaný početním zpracováním.

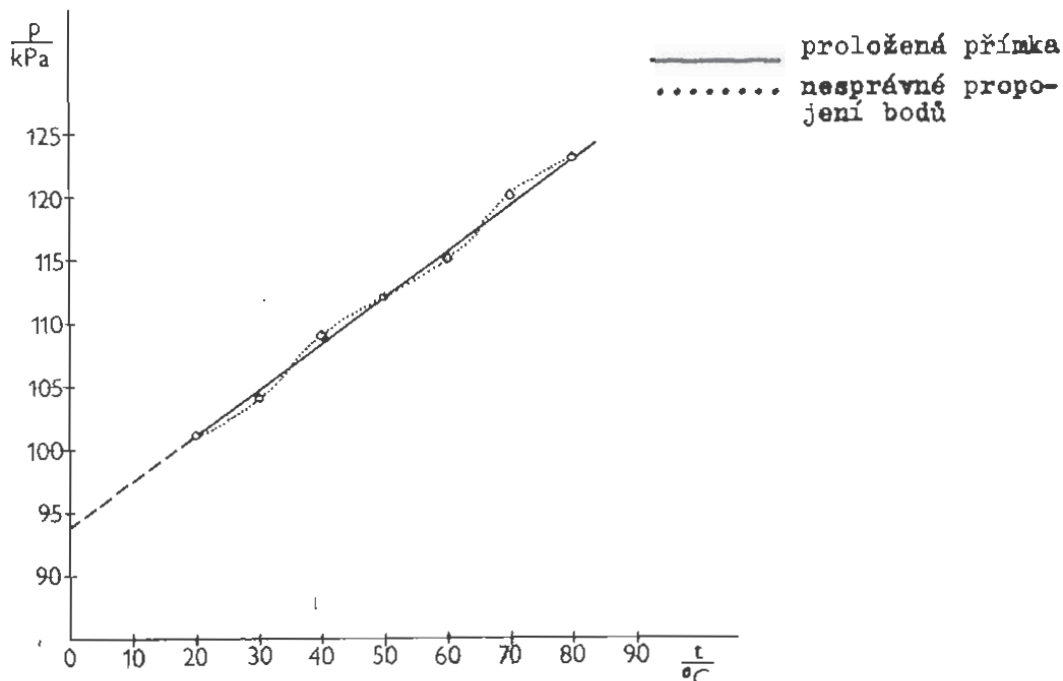
Pro konstrukci grafu máme k dispozici n naměřených dvojic hodnot (p_i, w_i) . Každé dvojici odpovídá v grafu bod v rovině pravouhlých souřadnic p, w . Těchto n bodů vyznačuje průběh křivky znázorňující závislost $w = f(p)$.

Body grafu získané měřením neleží přesně na této křivce, ale jsou kolem ní rozptýlené na obě strany. Rozptýlení je tím větší, čím větší je chyba měření.

Kdybychom křivku grafu vedli naměřenými body, byla by nepravidelná a neodpovídala by naměřené závislosti (obr. 22 - tečkovaná čára). Je potřeba ji proto proložit tak, aby naměřené body byly kolem ní rozloženy co nejtěsněji z obou stran, a přitom aby byla hladká a plynulá. Druh závislosti většinou známe buď z teorie, nebo z početního zpracování výsledků měření, křivku grafu prokládáme v tom případě tak, aby tomuto druhu závislosti odpovídala. Před proložením můžeme zjistit parametry křivky početně - např. metodou nejmenších čtverců.

Příklad 22. Proložení přímky naměřenými body: konstrukce grafu

Zkonstruujte graf závislosti tlaku plynu na teplotě při konstantním objemu pro naměřené hodnoty z příkladu 20 (tab. 20) - obr. 22.



Obr. 22. Proložení přímky naměřenými body: Graf závislosti tlaku plynu na teplotě při konstantním objemu

Z teorie víme, že tato závislost má analytický tvar

$$p = p_0 (1 + \gamma (t - t_0));$$

v grafu je tedy znázorněna přímkou. Je vidět, že kdybychom naměřené body spojili (tečkovaná čára), nedostali bychom odpovídající tvar závislosti.

Pro proložení přímky byly využity její parametry a^x a b^x určené v příkladu 20 metodou nejmenších čtverců.

Z obr. 22 v předchozím příkladu je vidět, že graficky můžeme jednoduchým způsobem provést extrapolaci a interpolaci. Pro libovolnou hodnotu veličiny p z intervalu naměřených hodnot $\langle p_1, p_n \rangle$ odečteme odpovídající hodnotu proměnné w z bodu ležícího na křivce grafu. Podobně to můžeme udělat pro body p ležící mimo interval naměřených hodnot; musíme si však být jisti, že závislost má stejný tvar i mimo tento interval.

Početní extrapolace a interpolace jsou přesnější. Grafický způsob je rychlejší a jednodušší. Chyba hodnot získaných při grafické interpolaci a extrapolaci je dána chybou měření a chybou vznikající při odečítání v grafu. Při dobře narýsovaném grafu na milimetrovém papíře můžeme chybu při odečítání odhadnout hodnotu jednoho dílku.

Příklad 23. Grafická interpolace a extrapolace

Z grafu na obrázku 22 můžeme odečíst, že např.

při teplotě $t = 0$ °C by tlak plynu byl $p = 93,5$ kPa,

při teplotě $t = 25$ °C by tlak plynu byl $p = 103$ kPa,

při teplotě $t = 90$ °C by tlak plynu byl $p = 127$ kPa,

při teplotě $t = 100$ °C by tlak plynu byl $p = 130,5$ kPa.

Obráceně můžeme z grafu zjistit, že plyn by měl např.

tlak $p = 100$ kPa při teplotě $t = 17$ °C a

tlak $p = 121$ kPa při teplotě $t = 74$ °C.

Chyby při odečítání jsou asi 1 °C a $0,5$ kPa; ty je potřeba připočítat ještě k celkovým chybám u_t a u_p určeným z naměřených hodnot uvedených v tabulce 20.

Aby byl graf jasný a názorný a nestal se při odečítání hodnot zdrojem zbytečných chyb, je potřeba při jeho konstrukci dodržovat několik zásad.

Graf rýsujeme vždy na milimetrovém papíře.³⁰⁾ Vyznačíme na něm pravouhlé osy, které popíšeme symboly příslušných veličin a jednotek. Svislou osu použijeme pro závislou veličinu, vodorovnou osu pro veličinu nezávisle proměnnou. Na obou osách vyznačíme stupnici pomocí bodů rozložených ve stejné vzdálenosti od sebe a přiřadíme jim odpovídající číselné hodnoty veličin. Nulové hodnoty nemusí odpovídat počátkům os. Stupnice volíme tak, aby graf využíval celou plochu papíru, který máme k dispozici.

³⁰⁾ Případně používáme logaritmický, semilogaritmický apod. papír; nikdy ne papír, který není pro konstrukci grafů určen.

Ko každému grafu přikládáme tabulku naměřených hodnot, pomocí nichž jsme graf konstruovali. Naměřené hodnoty proto zásadně do grafu nevypisujeme. Vyznačíme je výrazně jako body tak, aby je proložená křivka nepřekryla; použijeme např. značek +, Δ , o, \square ; ne pouhých teček. Zakreslujeme-li do jednoho grafu několik závislostí, použijeme pro body každé z nich jiných značek.

Naměřenými body proložíme hladkou křivku. Je-li v grafu jen jedna křivka, vytáhneme ji plnou čarou. Je-li v něm křivek více, odlišíme je tím, že některé vytáhneme šárkovaně, čerchovaně apod. - nebo je rozlišíme alespoň pomocnými symboly (např. je očísujeme).

Pokud tvar závislosti neznáme z teorie nebo z předchozího početního zpracování výsledků měření, snažíme se ho odhadnout z polohy naměřených bodů a křivku proložíme tak, aby se k nim co nejtěsněji přimykala a aby kolem ní byly rozloženy rovnoměrně po obou stranách. Musíme k tomu mít dostatečný počet bodů, alespoň 10 - 15.

Křivku vytáhneme tak, aby naměřené body nepřekryla a aby zůstaly dobře viditelné. Je z nich možné usuzovat na přesnost, s jakou byly změřeny, a jak se tato přesnost měnila v průběhu měření. Graf nás také může upozornit na hodnoty, které by mohly být zatíženy hrubou chybou. K naměřeným bodům můžeme vyznačit i jejich chyby, nejlépe mezní celkové chyby. Znázorníme je jako intervaly - úsečky, v jejichž středu leží naměřená hodnota a jejichž délka je rovna dvojnásobku chyby (viz příklad 24).

V záhlaví každého grafu uvedeme jeho pořadové číslo a název vystihující znázorněnou závislost.

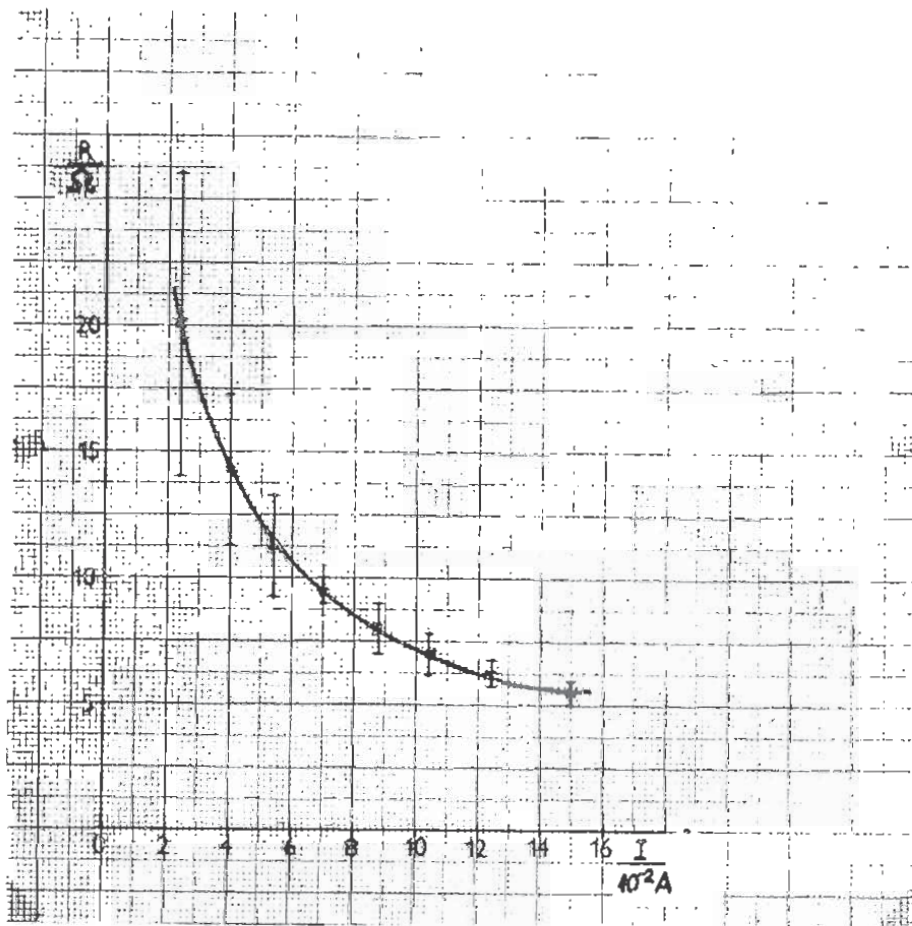
Do grafu nevyznačujeme žádné pomocné čáry.

Graf rýsuje zásadně ostrou tužkou, pomocí pravítka a křivítka. Nako- nec jej můžeme vytáhnout tuží. Nikdy nepoužíváme více barev; graf musí být dostatečně názorný a srozumitelný i při černobílé reprodukci.

Základní nedostatky při konstrukci grafů jsou ukázány v příkladu 25.

Příklad 24. Vyznačení chyby měření v grafu

Na obr. 23 je graf závislosti odporu R polovodičové diody na procházejícím proudu I . Dioda byla zapojena v propustném směru. Měření bylo provedeno nepřímou metodou popsanou v příkladu 4, v zapojení podle schématu na obr. 4(b).



Obr. 23. Graf závislosti odporu selenové diody na procházejícím proudu v propustném směru, s vyznačenými mezními chybami měření odporu

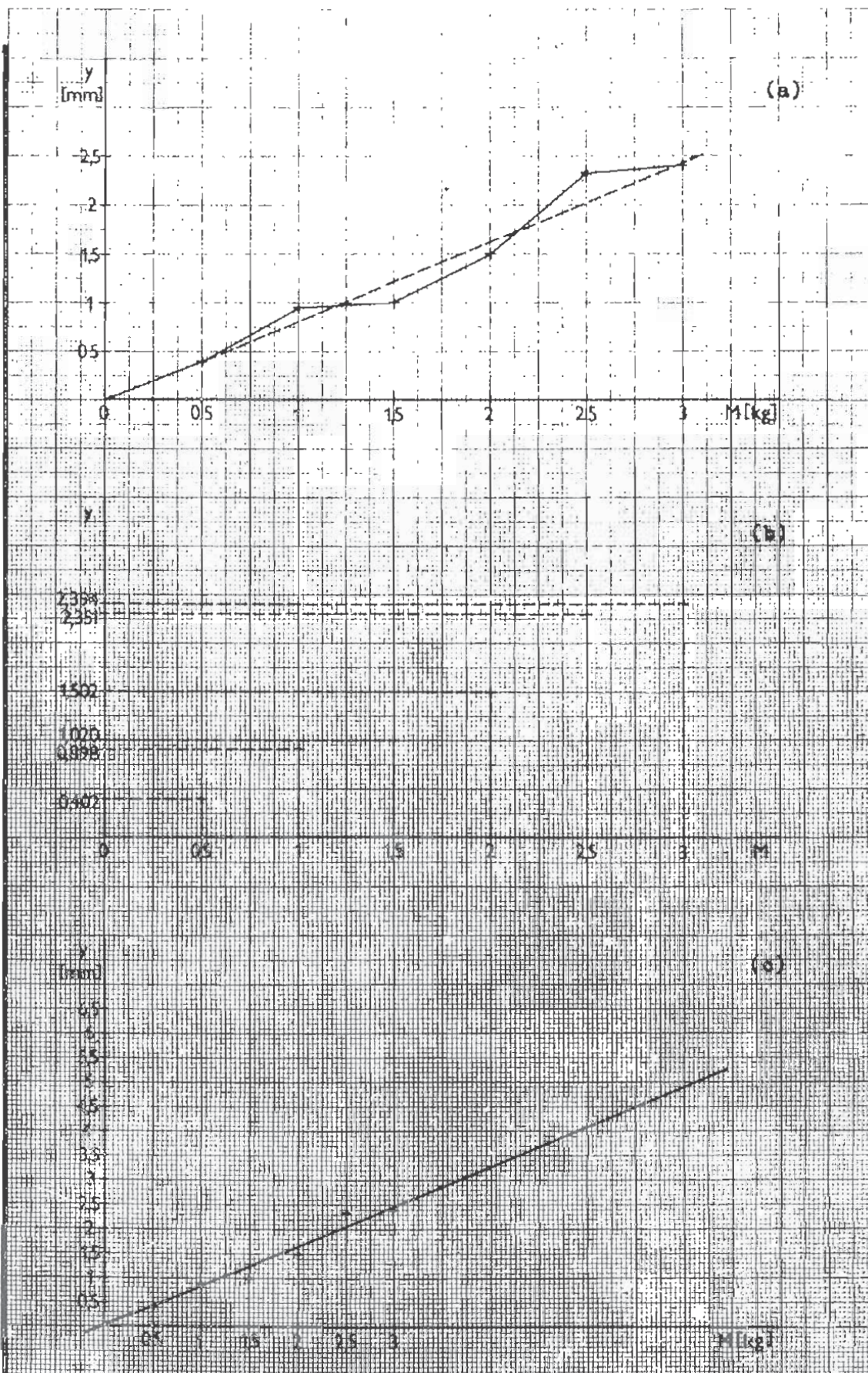
Příklad 25. Základní nedostatky při konstrukci grafů

Prohlédněte si dobře následující tři grafy na obr. 24 (a), (b), (c). Jsou to grafy závislosti průhybu y ocelového trámku, podepřeného na obou koncích, na hmotnosti M zátěže zavěšené v jeho středu. (Toto měření umožňuje určit modul pružnosti v tahu materiálu, z něhož je trámek vyroben.)³¹⁾

Nedostatky uvedených grafů:

- V grafu jsou jednotlivé body, sestrojené na základě naměřených hodnot, spojeny lomenou čarou; znázorněná závislost má být proložena (jak to ukazuje čárkovaně vyznačená přímka). Osy mají být označeny $\frac{y}{\text{mm}}$, $\frac{M}{\text{kg}}$.
- U značek veličin na osách nejsou uvedeny jednotky. Stupnice na osách se označují rovnoměrně rozloženými body, nevádějí se na nich body odpovídající naměřeným hodnotám, jako je tomu v tomto grafu na ose y . Pro jednotlivé body grafu se nevyznačují rovnoběžky s osami. Není proložena křivka (zde přímka) závislosti $y = y(M)$ (pomocí pravítka, v případě nelineárních závislostí pomocí křivítka).

³¹⁾ Podrobný popis této metody je uveden např. v [3], s. 11-14



Obr. 24. Chybně sestavené grafy závislosti průhybu ocelového trámku na zatížení

(c) Stupnice na ose y je nevhodně rovňována; snažíme se, aby graf pokryl pokud možno celou plochu, kterou máme k dispozici. Proložená přímka je nesprávně prodloužena za hranice intervalu, v němž leží hmotnosti závaží užitých při měření (záporné hmotnosti?; na druhé straně si nemůžeme být jisti, že závislost je i pro $M > 3$ kg stále lineární). Osy mají být označeny $\frac{y}{\text{mm}}$, $\frac{M}{\text{kg}}$.

5.8 Grafické vyrovnání naměřených závislostí

Jsou-li naměřené hodnoty zatíženy malou chybou, není nesnadné jimi proložit křivku znázorňující danou závislost. Je-li však chyba velká, je rozptyl naměřených bodů kolem hledané křivky velký, a je proto nesnadné křivku umístit.

V tom případě hledáme nejpravděpodobnější průběh křivky metodou grafického vyrovnání.

Předpokládejme, že studovaná závislost je lineární,

$$w = a + b p ,$$

a že naměřené dvojice hodnot (p_i, w_i) , $i = 1, \dots, n$ jsou zatíženy jen náhodnými chybami. Z těchto dvojic získáme přímku, najdeme-li alespoň dva body, které na ní leží.

Vyneseme naměřené body do grafu a rozdělíme je na dvě skupiny, které buď obsahují stejný počet bodů, nebo v nichž se počet bodů liší o jeden. Jsou-li body změřeny se stejnou přesností, mají pro určení přímky stejný význam; můžeme si obrazně představit, že mají stejnou "tíhu" a že "těžiště" každé z vydělených skupin bude ležet na této přímce. Tato těžiště tedy vyhledáme, a tím dostaneme dva body potřebné pro určení hledané přímky. Postup je patrný z následujícího příkladu 26.

Příklad 26. Grafické vyrovnání lineární závislosti

Vlastností proudění reálné kapaliny je možné studovat např. na základě měření závislosti objemu q kapaliny proteklé vodorovnou trubicí za jednotku času na rozdílu tlaků Δp na začátku a konci trubice.³²⁾

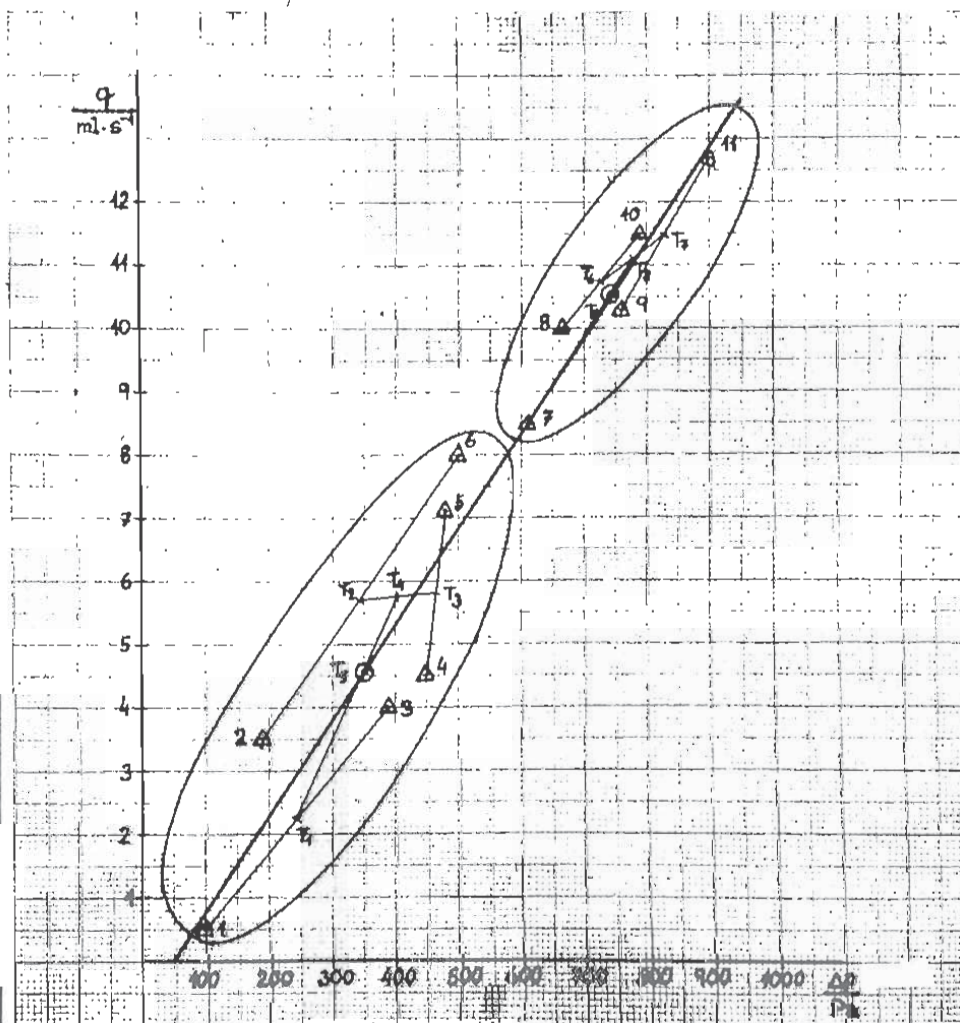
Ve fyzikálních praktiku byly naměřeny hodnoty uvedené v tabulce 21. Na základě teorie předpokládáme, že se jedná o závislost lineární (proudění bylo laminární). Chceme zkonstruovat její graf. Protože jsou naměřené body zatíženy velkou chybou, a tudíž značně rozptýleny kolem předpokládané přímky, použijeme pro její proložení metodu grafického vyrovnání.

32) Podrobný popis této metody je uveden v [2], s. 33 - 35

Tabulka 21. Naměřené hodnoty průtočného objemu q kapaliny v závislosti na rozdílu tlaků Δp

Pořadové číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{\Delta p}{Pa}$	99	188	394	448	477	500	613	665	762	788	900
$\frac{q}{ml \cdot s^{-1}}$	0,5	3,5	4,0	4,5	7,1	8,0	8,5	10,0	10,3	11,5	12,7

Naměřené body jsou v grafu na obr. 25 označeny symbolem "▲" a pořadovými čísly 1 až 11. Jsou rozděleny do dvou skupin - v první jsou zahrnuty body 1 až 6, ve druhé 7 až 11.



Obr. 25. Grafické vyrovnání závislosti průtočného objemu kapaliny na rozdílu tlaků na začátku a na konci trubice při laminárním proudění

Nejdříve hledáme těžiště první skupiny. Najdeme např. těžiště T_1 bodů 1 a 3 - leží ve středu jejich spojnice; pak těžiště T_2 bodů 2 a 6 a těžiště T_3 bodů 4 a 5. Těžiště T_4 skupiny bodů 4,5 a 2,6 leží ve středu úsečky $T_2 T_3$; každé z těžišť - T_2 a T_3 má totiž stejnou tíhu dvou bodů. Těžiště T_5 celé skupiny leží na úsečce $T_1 T_4$. Bod T_1 má tíhu dvou bodů - 1 a 3, bod T_4 tíhu čtyř bodů - 2, 6, 4 a 5. Těžiště T_5 bude proto úsečku $T_1 T_4$ dělit v poměru $2 : 4 = 1 : 2$ a bude ležet blíže těžšímu bod T_4 .

Podobným postupem najdeme těžiště T_9 druhé skupiny bodů. Na obr.25 jsou nejprve skonstruovány body T_6 a T_7 pro dvojice 8, 10 a 9, 11, pak bod T_8 ležící ve středu úsečky $T_6 T_7$. Těžiště T_9 leží na spojnici těžiště T_8 a naměřeného bodu 7, blíže k T_8 . Dělí tuto spojnici v poměru $1 : 4$; naměřený bod 7 má totiž tíhu jednoho bodu, těžiště T_8 tíhu čtyř bodů.

Body T_5 a T_9 určují hledanou přímkou.

Všimněte si, že tato přímka protíná vodorovnou osu mimo počátek souřadné soustavy, prochází bodem o souřadnicích $p = 50 \text{ Pa}$, $q = 0 \text{ ml.s}^{-1}$. Do naměřených hodnot se promítá systematická chyba. Pokuste se samostatně najít její možné zdroje. Budete k tomu potřebovat podrobnější informace o metodě měření a měrném uspořádání, kterou najdete v literatuře uvedené v poznámce na počátku tohoto příkladu.

6. Příprava na měření a zpráva o provedeném měření

6.1 Příprava na měření ve fyzikální praktikě

Každý vědecký pokus je plánovitá, předem rozmyšlená a připravená činnost. Jeho příprava má stránku teoretickou a technickou. Výsledkem technické přípravy je návrh a realizace měrné aparatury. Ve fyzikální praktikě je technická příprava do značné míry redukována a omezuje se na některé podrobnosti, např. na volbu měřidel s ohledem na plánovanou přesnost měření. Technickou přípravu tu nahrazuje to, že se posluchači dostatečnou dobu před měřením seznámí s již hotovým měřicím zařízením k úloze, na kterou se připravují.

Výsledkem teoretické přípravy na měření ve fyzikální praktikě je tzv. písemná příprava pokusu. Je to v podstatě formulář, do něhož se před a v průběhu měření shromažďují všechny údaje nezbytné pro vyhodnocení výsledků a vypracování zprávy o provedeném měření. Při jeho sestavování postupujeme zpravidla takto:

- Seznámíme se s tím, co a případně jak máme měřit a stručně si tyto údaje zapíšeme: název, stručná teorie a označení veličin a zapsáním rovnic, popis metody a schéma měřicího zařízení; zároveň si zaznamenáme odkazy na použitou literaturu.
- Rozmyslíme si, které veličiny a v jakém pořadí musíme měřit a připravíme si příslušné tabulky.

- Provedeme předběžný odhad přesnosti měření z požadované přesnosti výsledků a z přesnosti měřidel, která můžeme použít; odhadneme také, kolikrát musíme měření provést (viz následující odstavec 6.2).
- Připravíme si místo pro nezbytné mezivýpočty (např. pro aritmetický průměr, směrodatnou odchylku) a pro konečné výsledky; zároveň označíme, které dodatečné informace a kam budeme zaznamenávat (např. tlak vzduchu v místnosti apod.).
- Vyhledáme výsledky obdobných měření provedených jinými autory (např. v tabulkách, učebnicích nebo ve zprávách o měření studentů, kteří úlohu měřili dříve), vypíšeme je a zaznamenáme odkazy na literaturu.

Dobře provedená příprava zajišťuje, že při měření nic důležitého neopomeneme, že nebudeme ztrácet čas dodatečným rozmyšlením, co a jak a čím změřit v průběhu pokusu. Podstatně se tím také zkrátí doba potřebná k vypracování zprávy o měření.

6.2 Plánování přesnosti měření

Před měřením je nutné předem uvážit, s jakou přesností se bude měření provádět. S ohledem na požadovanou přesnost je pak teprve potřeba volit metody měření, druhy měřidel atd. a rozhodnout, kolikrát bude potřeba měření provést.

Zvláště nezbytný je předběžný odhad přesnosti při nepřímých měřeních, při nichž měřenou veličinu w určujeme pomocí hodnot jiných veličin x, y, \dots :

$$w = f(x, y, \dots). \quad (127)$$

Vraťme se k odst. 4.7.3. Byly v něm ukázány některé případy vztahu (127), při nichž se chyba jedné z veličin x, y, \dots promítne do chyby veličiny w s velkou "váhou". (Např. je-li x ve vztahu (118) v mocnině s exponentem b , přispívá chyba veličiny x k chybě veličiny w b -násobně.) Zvláště v takových případech je potřeba předem odhadnout, jaká přesnost bude pro měření veličiny x postačující.

Odhad může být jen přibližný. Děláme ho pomocí maximálních chyb; chyby dílčích měření veličin x, y, \dots odhadujeme pomocí chyb měřidel, která chceme použít, a případně uvážíme i počet měření, která bude potřeba provést. Rozmyslíme si i další možné vlivy, které se mohou promítnout do přesnosti měření.

Při odhadu chyb měření je jednodušší počítat s relativními chybami než s chybami absolutními.

Příklad 27. Předběžný odhad přesnosti měření viskozity výtokovým viskozimetrem

Viskozitu η je možné měřit³³⁾ na základě Poiseuillovy rovnice

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta p t}{8 V l},$$

kde r je poloměr kapiláry, jíž protéká kapalina, jejíž viskozitu měříme, r je vnitřní poloměr kapiláry, l je její délka, Δp je rozdíl tlaků na začátku a na konci kapiláry, V je objem kapaliny proteklé kapilárou za čas t .

Přetlak Δp se realizuje jednoduchým zařízením prostřednictvím hydrostatického tlaku sloupce kapaliny o výšce h :

$$\Delta p = \rho g h,$$

kde g je tíhové zrychlení a ρ je hustota kapaliny.

Výsledný vztah pro měření je tedy

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho g h t}{8 V l}.$$

π , ρ , g a 8 jsou konstanty; hodnoty ρ a g vyhledáme v tabulkách a vezmeme je s takovým počtem platných míst, aby nepřispěly k chybě měření. Měřit budeme veličiny r , h , t , V , l .

Odhadneme maximální chybu veličiny η pomocí vztahu (85)

$$\Delta \eta = \left| \frac{\partial \eta}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial \eta}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial \eta}{\partial t} \right| \Delta t + \left| \frac{\partial \eta}{\partial V} \right| \Delta V + \left| \frac{\partial \eta}{\partial l} \right| \Delta l,$$

a určíme relativní chybu. Dostaneme pro ni jednoduchý vztah

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \left(4 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta l}{l} \right) \cdot 100 \%$$

Chceme-li, aby chyba veličiny nepřesáhla 2 - 3 %, bude potřeba, aby žádný ze sčítanců k ní nepřispěl více než asi 0,5 %. Z toho je vidět, že velké nároky na přesnost budou muset být splněny při měření poloměru r ; jeho relativní chyba by neměla přesáhnout $\frac{0,5\%}{4} \approx 0,1\%$. Chyba použitého měřidla bude muset být dosti malá: $\Delta r \approx 0,1\% \cdot r = 0,001r$. Poloměr kapiláry bude mít hodnotu zřejmě do 1 mm; chyba měřidla proto bude muset být asi $\Delta r = 0,001 \cdot 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ mm}$. Pro měření poloměru kapiláry je proto potřeba použít např. mikroskopu s okulárním mikrometrem. Podobně bychom provedli předběžný odhad přesnosti pro další veličiny.

6.3 Zpráva o provedeném měření

Už v úvodu jsme se zmínili o tom, že pro vědu je charakteristické zveřejňování informací o experimentech - všech nezbytných údajů o teoretických předpokladech, praktickém provedení, způsobu vyhodnocení a výsledcích. Umožňuje se tak jejich kritika a prověření.

³³⁾ Viz příklad 29

Informace o experimentu je možné podat různou formou, v různém rozsahu a na různém stupni podrobnosti. Ačkoliv se např. článek v časopise, odborná monografie, učebnice, přednáška, výzkumná zpráva, diplomová práce či referát z fyzikálního praktika z těchto hledisek liší, musí všechny obsahovat některé základní nezbytné údaje, podané všeobecně srozumitelným způsobem.

Je nutné, aby v nich vždy bylo uvedeno:

- kdo, kde a kdy měřil;
- co měřil a proč - na základě jakých úvah vyplynula potřeba provést pokus, resp. s jakým cílem bylo měření prováděno;
- jakou metodou - jaké jsou základní teoretické představy a vztahy, jaký je princip užití metody;
- jakými přístroji - v jakém uspořádání a zapojení, jaké typy přístrojů byly použity, jakou měly přesnost, jaké případně bylo jejich schéma, jaký výrobce;
- s jakými vzorky (zkoumanými objekty) - z jakého materiálu byly zhotoveny, jaké měly rozměry, vzhled, jakým způsobem byly připraveny apod.;
- při jakých dalších podmínkách - jaká byla teplota a tlak vzduchu v laboratoři a všechny další okolnosti, které by mohly být závažné;
- jaké jsou naměřené hodnoty - zpravidla ve formě tabulky. Každá tabulka má mít pořadové číslo, název vhodně charakterizující její obsah a záhlaví, které obsahuje jak dříve zavedené symboly veličin, tak jejich jednotky;
- jakým způsobem byly naměřené hodnoty zpracovány - jakou metodou, s jakými chybami (resp. k jaké pravděpodobnosti výskytu skutečné hodnoty se chyby vztahují), případně na základě jakých matematických vztahů;
- jaké jsou výsledky - zapíší se ve formě:

označení veličiny = (aritmetický \pm chyba) jednotka;
průměr

tento zápis se graficky zvýrazní. Zjištěné závislosti se udají tabulkou, případně zjištěným analytickým vztahem a grafem.

- jak je možné výsledky hodnotit - odhadne se správnost výsledků na základě jejich srovnání s výsledky jiných autorů, hledá se vysvětlení závažnějších odchylek jak mezi těmito výsledky, tak mezi jednotlivými naměřenými hodnotami, zhodnotí se výsledky provedeného měření z hlediska teoreticky očekávaných hodnot a přesnost měření z hlediska očekávané přesnosti, navrhnou se úpravy pokusu - např. metody měření, měřicí aparatury apod., formuluje se výsledný závěr plynoucí z měření;
- jaká literatura byla použita - a to jak při přípravě na měření, tak při srovnávání výsledků s výsledky jiných autorů. Odkazy na použitou literaturu musí obsahovat všechny údaje potřebné k tomu, aby kdokoli mohl bez obtíží práci vyhledat a najít v ní ten údaj, na který se autor zprávy o měření odvolává. Způsob citování literatury je vidět např. ve vzorovém referátu v příkladu 29.

Cílem vypracování referátu z praktika je mj. naučit se vypracovat zprávu o provedeném měření, která by mohla být publikována. Referát proto musí splňovat všechny požadavky popsané v tomto odstavci, a kromě toho musí mít

i dobrou grafickou úpravu. Měl by tvořit souvislý, dobře srozumitelný text, stručný a přitom obsahující všechny nezbytné údaje.

Ukázku nevyhovujícího i dobře zpracovaného referátu najdete v příkladech 28 a 29 na konci tohoto odstavce.

SHRNUTÍ III

1. Osnova písemné přípravy na měření ve fyzikálním praktiku

- a) Datum měření, jméno posluchače, název úlohy.
 - b) Pracovní úkoly.
 - c) Teoretické základy, zavedení symbolů veličin.
 - d) Popis metody měření.
 - e) Druhy přístrojů a jejich sestava (schéma zapojení či obrázek); použití měřidla a jejich přesnost.
 - f) Odhad hodnot měřených veličin (pomocí tabulek aj. publikací, ze zkušenosti apod.).
 - g) Odhad přesnosti měření.
 - h) Plán postupu měření (co je potřeba změřit, v jakém pořadí; připravené tabulky pro zápis výsledků).
- (Body b), c), d) a e) je možné připravit už v takové formě, aby se daly použít jako součást referátu.)

2. Osnova referátu

- a) Datum měření, jméno posluchače, označení praktika, název a číslo úlohy, studijní směr a číslo studijní skupiny, ročník.
- b) Pracovní úkoly.
- c) Teoretické základy, zavedení symbolů veličin; průběžně uvádět odkazy na použitou literaturu.
- d) Popis metody měření; odkazy na použitou literaturu.
- e) Použité přístroje a jejich sestava (obrázek, schéma), použitá měřidla a jejich přesnost; odkazy na použitou literaturu.
- f) Podmínky pokusu - teplota místnosti, tlak vzduchu, případně vlhkost a jiné okolnosti, které mohly měření ovlivnit.
- g) Naměřené hodnoty (v tabulkách).
- h) Popis způsobu zpracování dat (metoda zpracování, typ chyby, případně zvolená hodnota pravděpodobnosti, statistické vztahy).
- i) Výsledky číselně: $w = \bar{w} \pm u_{\bar{w}}$, zaokrouhlení, jednotka, případně uvést relativní chybu. (Z referátu musí být zřejmé, jak se k výsledku na základě naměřených dat došlo - tj. např. jaké hodnoty byly dosazovány do statistických vzorců nebo do vzorců používaných při vyhodnocování závislostí. Při výpočtu střední hodnoty a chyby dodržovat všechny podstatné kroky, tak jak jsou uvedeny ve SHRNUTÍ I a II.

j) Výsledky - graficky.

k) Diskuse výsledků:

1. Odhad správnosti (odhad systematické chyby; srovnání s tabelovanými aj. publikovanými hodnotami); snažit se o nalezení zdroje systematické chyby. Odkazy na použitou literaturu.
2. Hodnocení přesnosti (vzhledem k plánované přesnosti apod.).
3. Jiné okolnosti související s měřením, návrhy na úpravy měření či způsobu zpracování apod.

l) Závěr.

m) Seznam použité literatury.

Příklad 28. Ukázka referátu z fyzikálního praktika hodnoceného známkou "nedostatečně"

Tento referát byl odevzdán ve fyzikálním praktiku I na MFF UK v Praze dne 20.3.1984. Úvodní stránka referátu obsahující část údajů z bodu a) osnovy (viz předchozí shrnutí) je zde vynechána. Za referátem je uveden výčet nedostatků; pokuste se je ale předem najít sami.

Úloha č. 13

Měření měrné tepelné kapacity kapalin a plynů

- Pracovní úkoly:
- 1) Určete tepelnou kapacitu K elektrického kalorimetru.
 - 2) Změřte střední hodnotu \bar{c} měrné tepelné kapacity kapaliny elektrickým kalorimetrem pro příslušný teplotní interval.
 - 3) Změřte Poissonovu konstantu vzduchu metodou Clement-Desormesovou.

Teorie:

$$K = \frac{IU - mc(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}, \quad c = \frac{IU\tau}{m(t_2 - t_1)} - \frac{K}{m}$$

K - tepelná konstanta kalorimetru

I - intenzita elektrického proudu

U - el. napětí

τ - čas průchodu proudu odporem

m - hmotnost kapaliny v kalorimetru

$t_2 - t_1$ - teplotní rozdíl

c - měrné teplo

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2}, \quad \kappa = \frac{\log(b+h_1) - \log b}{\log(b+h_1) - \log(b+h_2)}$$

κ - Poissonova konstanta

h_1 - výška vodního sloupce před adiabatickým dějem

h_2 - přetlak po adiabatickém ději a tepelném vyrovnání.

Naměřené hodnoty:

1)

t (°C)	τ (s)
40	0
45	167
50	364
55	585
60	837
65	1127

$$U = 9 \text{ V}$$

$$I = 4 \text{ A}$$

$$V_{\text{H}_2\text{O}} = 300 \text{ ml}$$

$$K = 158 \pm 49 \text{ JK}^{-1}$$

t (°C)	τ (s)
30	0
32	28
34	45
36	75
38	115
40	168
42	227
44	293
46	358
48	427
50	502
52	572

$$U = 9 \text{ V}$$

$$I = 4 \text{ A}$$

$$V = 400 \text{ ml}$$

$$c = 2 \pm 0,3 \text{ kJkg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

2)

h_1	120	123	115	122	128	111	121
h_2	27	30	23	28	30	21	28
α	1,29	1,32	1,25	1,30	1,31	1,23	1,30

$$\alpha = 1,195 \pm 0,00542$$

Závěr:

V měření na kalorimetru byla asi chyba vzniklá nedostatečným množstvím kapaliny v kalorimetru, a proto byl teploměr ohříván nikoliv vodou, nýbrž parami, které jsou samozřejmě teplejší. Přesto se mi však podařilo spočítat měrné teplo glicerolu podobné jako nalezneme v tabulkách. Poissonova konstanta má také menší hodnotu nežli je tabelovaná hodnota. Zde mi někde v měřicím přístroji unikal vzduch, ale pro nedostatek času se mi nepodařilo tuto závadu najít a odstranit.

Nedostatky uvedeného referátu:

1. Teoretický úvod je neúplný; jsou uvedeny jen základní vztahy bez vysvětlení, pro jaký jev a za jakých podmínek jsou v platnosti. Ve vztahu pro tepelnou kapacitu K je chyba (v čitateli má být $IU - \dots$). Vznikla patrně z nepozornosti, protože v následujícím odvozeném vztahu se už neobjevuje.

Ve vysvětlení značky K je použit nesprávný termín "tepelná konstanta kalorimetru" - má být "tepelná kapacita kalorimetru". Nesprávně je

vysvětlena i značka I - místo "intenzita elektrického proudu" má být "elektrický proud". Nesprávný je i termín "měrné teplo" - má být "měrná tepelná kapacita".

2. Není popsána metoda měření. Není uvedeno, jaké přístroje byly používány, v jakém uspořádání a zapojení.
3. Nejsou uvedeny další podmínky, za nichž bylo měření prováděno.
4. Chybí vhodné názvy tabulek - tabulky nejsou ani očíslovány. V poslední z nich nejsou v záhlaví u značek veličin uvedeny jejich jednotky. Správné označení veličin a jednotek v záhlaví tabulek: např. $\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$, $\frac{h_1}{\text{mm}}$.
5. Není popsán způsob, jak byly výsledky měření zpracovány - tj. jak byly určeny střední hodnoty měřených veličin a chyby měření. Není uvedeno dokonce ani to, o jaký druh chyb se jedná. Co bylo dosazováno za T , t_1 , t_2 a m při výpočtu K a c a kterého ze dvou uvedených vztahů bylo použito pro výpočet?
6. Prvý z výsledků by měl být zapsán se závorkami: $K = (158 \pm 49) \text{ J.K}^{-1}$. Ve druhém výsledku chybí u střední hodnoty první desetinné místo a závorky: např. $c = (2,1 \pm 0,3) \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Tento výsledek je kromě toho vzhledem k naměřeným hodnotám ve druhé tabulce numericky nesprávně vypočítán. Numericky správně vypočtená hodnota c se značně liší od tabelované; naměřené hodnoty v druhé tabulce jsou v intervalu teplot $30 - 36 \text{ }^{\circ}\text{C}$ zatíženy hrubou chybou. Numericky nesprávně je vypočítán i poslední výsledek: jak střední hodnota, tak chyba měření. Hodnota chyby neodpovídá žádnému druhu obvykle uváděných chyb. Tento výsledek je také nesprávně zaokrouhlený. Správný výsledek má být: $\bar{x} = 1,29 \pm 0,07$; aritmetický průměr je vypočítán z hodnot v posledním řádku tabulky a je uvedena mezní celková chyba.
7. V závěru je první věta fyzikálně nesprávná. Při srovnání naměřených hodnot s tabelovanými hodnotami nestačí napsat, že jsou si "podobné": jsou buď shodné v mezích daných chybou měření, nebo shodné nejsou. Ve druhém případě pak hledáme důvody rozdílu - systematické chyby.
8. Nejsou uvedeny odkazy na použitou literaturu.
9. Glycerol, glycerin!

Příklad 29. Ukázka referátu z fyzikálního praktika hodnoceného známkou "výborně"

Tento referát byl odevzdán ve fyzikálním praktiku I na MFF UK v Praze dne 20.4.1984

Oddělení fyzikálních praktik při katedře fyziky polymerů MFF UK

PRAKTIKUM I : MECHANIKA A MOLEKULOVÁ FYZIKA

Úloha č.9.....

Název: Měření viskozity

Pracoval:~..... stud. skup. 4 M-F poř. č. 10 dne 20.4.1984

Posuzoval:~..... dne 23.4.84 výsledek klasifikace1.....

Připomínky:

Pracovní úkol:

1. Změřte dynamickou viskozitu vody při pokojové teplotě metodou výtoku kapaliny kapilárou z Mariotteovy láhve.
2. Určete teplotní závislost kinetické viskozity vody v oboru teplot od 20 °C do 60 °C metodou Ubbelohdeova viskozimetru.

Teoretické základy měření:

V reálné kapalině existují smyková napětí. Jejich velikost pro jednotkovou vzájemnou rychlost po sobě se posouvajících vrstev kapaliny je charakteristickou vlastností kapaliny. Pro vyjádření této vlastnosti se zavádí dynamická viskozita vztahem ([1], s. 144)

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}}, \quad (1)$$

kde τ je smykové napětí působící na plochu a $\frac{dv}{dy}$ je změna (gradient) rychlosti podél osy y v místě plochy. Jednotkou dynamické viskozity v soustavě SI je $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$.

K vyjádření viskózních vlastností kapalin se zavádí kromě dynamické viskozity kinematická viskozita ν vztahem ([1], s. 144),

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

kde ρ je hustota dané kapaliny. Jednotkou kinematické viskozity v soustavě SI je $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

Při měření vyjdeme v Poiseuillovy rovnice ([1], s. 145)

$$V = \frac{\pi r^4 p t}{8 \eta l}, \quad (3)$$

kde V je objem kapaliny, která proteče při laminárním proudění trubici délky l a poloměru r za dobu t při tlakovém rozdílu p mezi konci trubice.

Z rovnice (3) plyne pro dynamickou viskozitu η vztah

$$\eta = \frac{\pi r^4 p t}{8 V l}. \quad (4)$$

Je možné ho však použít pouze v případě, je-li proudění laminární, tj. je-li pro Reynoldsovo číslo R_e splněna podmínka ([1], s. 145)

$$R_e = \frac{2 r \rho v}{\eta} < 2000. \quad (5)$$

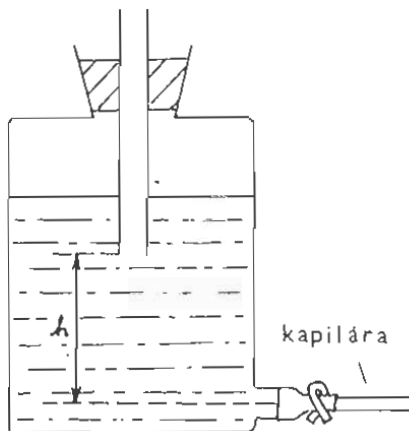
Pro větší rychlosti, pro které podmínka (5) neplatí, je třeba do vztáhu (4) zavést Hagenovu opravu ([1], s. 146). Pak platí

$$\eta = \frac{\pi r^4 p t}{8 V l} - n \frac{\rho V}{8 \pi l t}, \quad (6)$$

kde n je číselný koeficient, zpravidla blízký hodnotě 1,1.

Metody měření:

1. K měření dynamické viskozity užijeme Marriotteovy láhve ([1], s. 146) - obr. 1. Kapilárou délky l o poloměru r se z ní nechá po dobu t vytékat voda. Voda vytéká pod stálým přetlakem $p = \rho g h$.



Obr. 1. Marriotteova láhev
(Podle [1], s. 146)

Vztah (4) pro výpočet dynamické viskozity bude mít proto tvar

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho g h t}{8 V l}. \quad (7)$$

Měříme dobu t , za kterou proteče voda o objemu V , výškovou odlehlost h a parametry kapiláry r a l . Za ρ a g dosadíme tabelované hodnoty.

2. Ubbelohdův viskozimetr ([2], s. 38) - obr. 2. - je vhodný pro poměrné měření kinematické viskozity. Přetlak p ze vztáhu (4) v něm není při protékání kapaliny konstantní. Jestliže však známe dobu průtoku t_0 kapaliny o známé kinematické viskozitě ν_0 , dostaneme pro neznámou kinematickou viskozitu ν vztah ([1], s. 147)

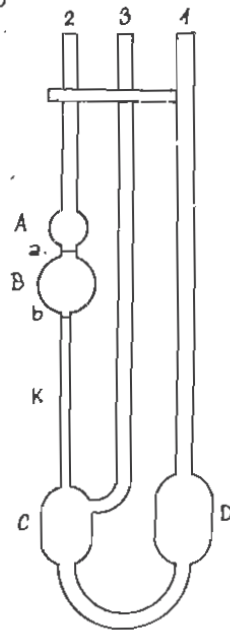
$$v = \frac{v_0}{t_0} t ; \quad (8)$$

stačí pak měřit dobu průtoku t kapaliny s neznámou viskozitou.

S opravou pro ustálené proudění přejde rovnice (8) do tvaru ([2], s. 39)

$$v = A t - \frac{B}{t}, \quad (9)$$

kde $A = \frac{v_0}{t_0}$. Konstanty A a B bývají udány ve zkušebním listu viskozimetru.



- 1. plnicí trubice
- 2. trubice
- 3. zavzdušňovací trubice
- A, B, C, D bančky
- K kapilára
- a, b rysky

Obr. 2. Ubbelohdeův viskozimetr. Podle [2], s. 38

Kapilárou K necháváme protékat vždy stejný objem vody vymezený ryskami a, b (obr. 2). Před měřením vodu nasajeme do baněk A a B pístem; trubice 3 je přitom uzavřena. Po uvolnění obou trubic 2 a 3 začne voda volně stékat kapilárou K. Stopkami měříme čas t , za který klesne voda od rysky a k rysce b.

Měření provádíme pro různé teploty τ . Teplotu udržujeme pomocí termostatické lázně, do níž je celý viskozimetr ponořen; τ je teplota této lázně.

Naměřené hodnoty a jejich zpracování:

Podmínky v laboratoři:

teplota vzduchu:	20,5 °C
tlak:	99,8 kPa
vlhkost:	54 %

1. Dynamická viskozita vody měřená pomocí Marriotteovy láhve

V tabulce 1 jsou uvedeny naměřené hodnoty času t pro stejný objem vody $V = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ a vypočtené hodnoty η . Pro výpočet byl použit vztah (7); Hagenovu opravu nebylo třeba zavádět, protože byla splněna podmínka (5): $R_e \approx 100$.

Čas byl měřen digitálními stopkami, u nichž je možné dosáhnout přesnosti 0,01 s. Vzhledem k reakční době však uvažujeme chybu

$$\Delta t = 0,1 \text{ s.}$$

Další změřené veličiny a jejich chyby:

Objem V , měřený odměrným válcem, $\Delta V = 10^{-6} \text{ m}^3$:

$$V = (50 \pm 1) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Výšková odlehlost h , měřená katetometrem s dosažitelnou přesností 10^{-4} m ; pro otřesy podlahy v laboratoři a nesnadné rozeznání výšky hladiny v láhvi odhadujeme $\Delta h = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$:

$$h = (5,36 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Délka kapiláry, měřená posuvným měřítkem, $\Delta l = 10^{-4} \text{ m}$:

$$l = (12,88 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Průměr kapiláry byl uveden u úlohy, $2r = (1,23 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Z tabulek ([3], s. 33 a 22) jsme převzali hodnoty hustoty vody $\rho = 998,2 \text{ kgm}^{-3}$ - pro vodu o teplotě 20°C (kterou jsme změřili na počátku pokusu), a tíhového zrychlení $g = 9,807 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$.

Tabulka 1: Doba t výtoku vody z kapiláry v Marriotteově láhvi a hodnoty viskozity; $V = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

Pořadové číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{t}{s}$	228,4	227,5	224,0	234,2	223,3	228,3	226,3	230,3	212,1
$\frac{\eta}{\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}\cdot 10^{-3}}$	1,046	1,042	1,026	1,072	1,022	1,045	1,036	1,055	0,971

Pořadové číslo měření	10	11	12
$\frac{t}{s}$	208,4	215,8	210,1
$\frac{\eta}{\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}\cdot 10^{-3}}$	0,954	0,988	0,962

$$\text{Aritmetický průměr } \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \eta_i}{12} = 1,018 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$$

Směrodatná odchylka jednoho měření

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} (\eta_i - \bar{\eta})^2}{11}} = 0,039 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}.$$

Hrubé chyby se v souboru hodnot η_i nevyskytují (podle 3s-kritéria).

$$\text{Směrodatná odchylka aritmetického průměru } s_{\bar{\eta}} = \frac{s}{\sqrt{12}} = 0,011 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}.$$

Celková měrná chyba

$$u_{\eta} = \sqrt{(3s_{\eta})^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r}\right)^2 (\Delta r)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial h}\right)^2 (\Delta h)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 (\Delta t)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial l}\right)^2 (\Delta l)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial V}\right)^2 (\Delta V)^2} = 0,04 \cdot 10^{-3} \text{ N.s.m}^{-2}.$$

Výsledek měření dynamické viskozity vody pomocí Marriotteovy láhve

$$\eta = (1,02 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ N.s.m}^{-2} ; \text{ relativní chyba } 4 \%$$

2. Závislost kinematické viskozity vody na teplotě, měřená pomocí Ubbelohdeova viskozimetru

V tabulce 2 jsou uvedeny naměřené hodnoty doby t průtoku daného objemu vody kapilárou.

Čas t jsme měřili stejnými stopkami jako v předchozím případě, opět uvažujeme chybu $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.

Teplotu τ termostatovací lázně jsme měřili rtuťovým teploměrem s přesností $\Delta \tau = 0,5 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Výpočet kinematické viskozity jsme provedli podle vztahu (9).

Hodnotu konstanty A jsme převzali ze zkušební listu viskozimetru: $A = 2,998 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Dále zde byla udána hodnota kinematické viskozity

$\nu_1 = 1,007 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ kapaliny, jejíž průtok viskozimetrem trval dobu $t_1 = 338,35 \text{ s}$. Z těchto údajů a ze vztahu (9) jsme určili hodnotu konstanty $B = 2,495 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

Tabulka 2. Doba t výtoku vody kapilárou v Ubbelohdeově viskozimetru a závislost kinematické viskozity vody na teplotě

Pořadové číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{\tau}{^{\circ}\text{C}}$	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0	55,0	60,0
$\frac{t}{\text{s}}$	331,0	302,4	270,0	244,1	224,0	205,1	189,5	175,6	163,6
$\frac{\nu}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 10^{-6}}$	0,992	0,907	0,810	0,732	0,672	0,615	0,568	0,526	0,491

Chyba měření určená jen z přesnosti stopek pomocí vztahu

$$u_{\nu} = \left| \frac{\partial \nu}{\partial t} \right| \Delta t,$$

je rovna $u_{\nu} = 0,0003 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, tj. 0,03 % pro $\tau = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ a 0,05 % pro $\tau = 60 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Tato chyba však neodpovídá skutečné přesnosti měření. Zdrojem chyb je zřejmě i viskozimetr, ale v jeho zkušebním listu není žádný údaj o přesnosti uveden a chybu proto není možné na základě provedených

měření odhadnout. Je pravděpodobné, že bude $\approx 1\%$, jak se uvádí v [1], s. 147 pro podobný, tzv. Ostwaldův viskozimetr.

Závislost $\nu = \nu(\tau)$ je vynesena do grafu 1. Na základě výpočtu diferencí hodnot ν ([1], s. 56-59) jsme zjistili, že této závislosti odpovídá polynom stupně 5.

Diskuse:

Dynamická viskozita změřená pomocí Marriotteovy láhve

$\eta = (1,02 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ N.s.m}^{-2}$, se v mezích chyby neliší od tabelované hodnoty $\eta = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ N.s.m}^{-2}$ při 20°C ([1], s. 145).

Z tabulky 1 je vidět systematický pokles hodnot η v druhé polovině měření. Mohlo k tomu dojít z toho důvodu, že v laboratoři v průběhu měření klesala teplota, a mohla proto klesnout i teplota vody v Marriotteově láhvi. Tuto skutečnost jsme však neověřili; teplotu vody jsme měřili jen na začátku. Bylo by proto vhodné kontrolovat teplotu vody i v průběhu měření.

Pokles hodnot η však nepřesáhl meze dané chybou měření.

Celkovou chybu měření η nejvíce ovlivnila chyba, s jakou byl určen objem - 2%. Zde by bylo vhodné použít přesnější metody. Ostatní veličiny byly určeny s postačující přesností; chyba měření času byla tak malá, že se do celkové chyby η nepromítla. Zmíněná závislost kinematické viskozity vody na teplotě v rozmezí teplot $20 - 60^\circ\text{C}$ je uvedena v tab. 2 a v grafu 1. Lze ji aproximovat polynomem stupně $n = 5$, v grafu 1 a v tabulce 3 jsou také zachyceny tabelované hodnoty kinematické viskozity pro některé teploty vypočtené z uvedených tabelovaných hodnot hustoty vody ρ a dynamické viskozity vody η ([3], s. 33 a 43).

Tabulka 3. Kinematická viskozita vody vypočtená z tabelovaných hodnot hustoty a dynamické viskozity a odchylky naměřených hodnot

$\frac{\tau}{^\circ\text{C}}$	20	25	30	40	50	60
$\frac{\eta}{\text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 10^{-3}}$	1,002	0,891	0,798	0,654	0,548	0,467
$\frac{\rho}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$	998,2	997,0	995,7	992,2	988,0	983,2
$\frac{\nu}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 10^{-6}}$	1,003	0,894	0,801	0,659	0,555	0,475
$\frac{\Delta \nu}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 10^{-6}}$	-0,011	0,013	0,009	0,013	0,013	0,016

$\Delta \nu$ je rozdíl mezi naměřenou a vypočtenou hodnotou kinematické viskozity vody, $\nu_{\text{naměř.}} - \nu_{\text{vyp.}}$

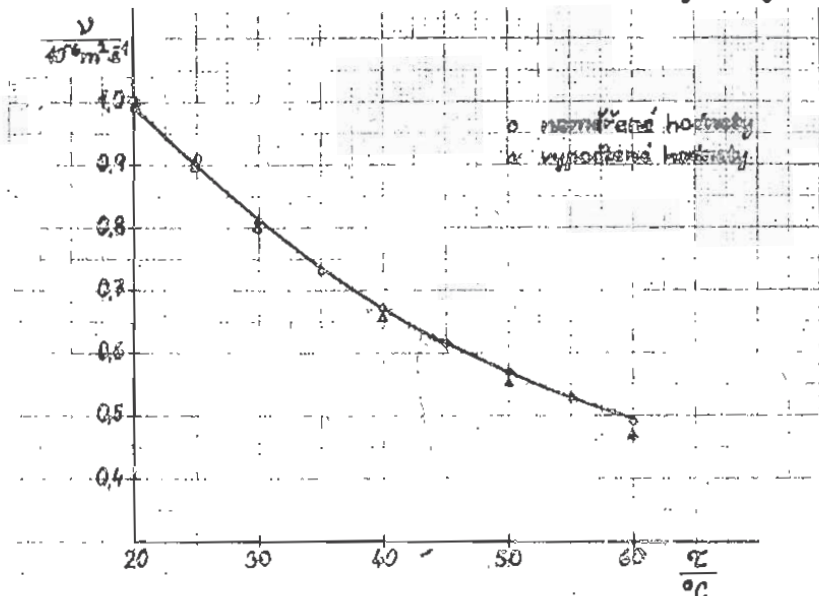
Z grafu č. 1 a z tabulky 3 je vidět, že - s výjimkou první hodnoty měřené při pokojové teplotě - jsou naměřené hodnoty kinematické viskozity systematicky vyšší než hodnoty vypočtené podle tabulek. Tento rozdíl je v mezích 1 % - 3 %, tj. přesahuje předpokládanou chybu Ubbelohdeova viskozimetru. Vysvětlujeme si to tím, že měřený vzorek vody ve viskozimetru nedosahoval ještě při měření té teploty, jakou měla termostatovací lázeň, v níž byl viskozimetr ponořen. (Měřená teplota τ je právě teplota této lázně.) Bylo by proto potřeba nechat před každým měřením delší čas na vyrovnání teploty měřeného vzorku a lázně.

Závěr: Požadované pracovní úkoly jsme splnili:

1. Změřili jsme dynamickou viskozitu vody při teplotě 20 °C metodou výtoku kapaliny kapilárou z Marriotteovy láhve.
2. Určili jsme teplotní závislost kinematické viskozity vody v oboru teplot od 20 °C do 60 °C metodou Ubbelohdeova viskozimetru.

Tato úloha byla časově velmi náročná.

Graf č. 1: Závislost kinematické viskozity vody na teplotě



Použitá literatura:

- [1] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1983
- [2] Bakule, R. a kol.: Fyzikální praktikum pro učitelské obory. UK, Praha 1982
- [3] Brož, J., Roskovec, V., Valouch, M.: Fyzikální a matematické tabulky. SNTL, Praha 1980

NA ZÁVĚR

Poznatky, s nimiž jste se setkali v tomto skriptu, umožňují už přejít k vlastním měřením - připravit je, provést a zpracovat jejich výsledky. K tomu jsou zaměřena fyzikální praktika, jimiž projdete v dalších semestrech studia.

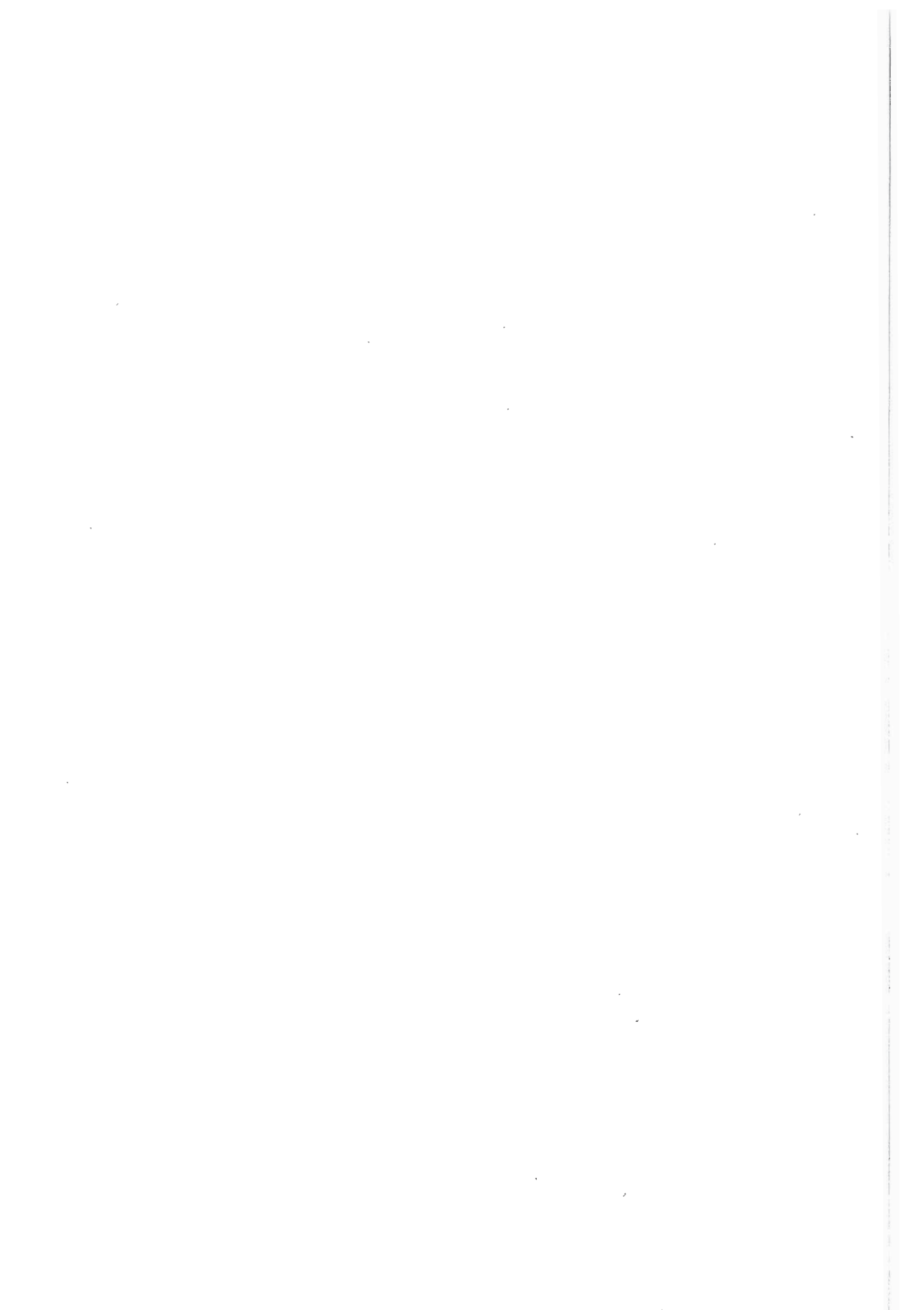
Problematika fyzikálních měření je však mnohem širší a skrývá v sobě celou řadu zajímavých otázek.

Např. o úloze experimentu v historii fyziky je možné se dočíst v knihách [1], [8]. Konkrétním příkladům měřicích metod jsou věnovány rozsáhlé práce [2] a [3] i starší [6]. Matematická statistika zná řadu dalších metod umožňujících podrobněji a do větší hloubky analyzovat naměřené údaje a plánovat průběh experimentu; můžete se s nimi seznámit např. v práci [10]. Numerická matematika poskytuje mnoho návodů, jak optimálně provádět výpočty se získanými číselnými údaji; najdete je např. v [5]. Podrobnější informace o vlastnostech měřicích přístrojů lze získat v knize [15].

Pro měření, která budete provádět v základním fyzikálním praktiku, však tyto další poznatky nejsou nezbytné. Poslouží však těm, kdo by si chtěli své vědomosti o fyzikálních měřeních dále doplňovat a rozšiřovat.

Literatura:

1. Achutin, A.V.: Istorija principov fizičeskogo experimenta. Moskva, Nauka 1976
2. Bakule, R. a kol.: Fyzikální praktikum pro učitelské obory. Skriptum. Praha, UK 1982
3. Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. 2. upravené vyd. Praha, SPN 1983. (1.vyd. Praha, SPN 1967)
4. Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření II. Praha, SPN 1974
5. Dėmidovič, B.P., Maron, I.A.: Osnovy vyčislitelnoj matematiky. Moskva, Nauka 1966
6. Horák, Z.: Praktická fyzika. Praha, SNTL 1958
7. Jarník, V.: Diferenciální počet I, II. Praha, NČSAV 1955, 1956
8. Lipson, H.: Velikije experimenty v fizike. Moskva, Mír 1972
9. Mechlová, E.: Fyzikální praktikum. Úvod do teorie a praxe fyzikálního měření. Skriptum. Ostrava, Pedagogická fakulta 1981
10. Mittenecker, E.: Plánování a statistické vyhodnocování experimentů. Praha, 1968
11. Názvy a značky školské fyziky. 4. upravené vyd. Praha, SPN 1979
12. Normy: ČSN 01 1300, ČSN 35 6201
13. Symboly, jednotky a názvosloví ve fyzice. Dokument UIP (20). Praha, Academia 1983
14. Šindelář, V., Smrž, L.: Nová soustava jednotek. Praha, SPN 1977
15. Zelený, F.: Základní vlastnosti měřicích přístrojů. Praha, SNTL 1976





Autor:	Doc. RNDr. Boris Sprušil, CSc., RNDr. Pavla Zieleniecová, CSc.
Název:	ÚVOD DO TEORIE FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ
Vydavatel:	Univerzita Karlova v Praze
Určeno:	pro posluchače fakulty matematicko-fyzikální, přírodovědecké (obor učitelství fyzika-chemie) a pedagogické (obor fyzika - základy techniky)
Vedoucí katedry:	prof. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc.
Povoleno:	rektorátem Univerzity Karlovy v Praze dne 28. 3. 1988, č.j. 2531/88-X-C IX/3-Lu-1/89
Nakladatel:	Státní pedagogické nakladatelství, n. p., Praha 1
Číslo publikace:	1014 - 6209
Vydání:	1/1, 1989
Náklad:	700 výtisků
Stran:	104
AA / VA:	8,83/9,54 103/23 823
Tematická skupina a podskupina:	17/32
Tiskárna:	TZ, n. p., provoz 52, Praha 1 - č. z. 22047
Druh tisku:	ofset

17 - 217 - 89	Cena Kčs 8,50
---------------	---------------

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou
v redakci nakladatelství

